



União da Vitória - Paraná

IX EPMEM

Encontro Paranaense de Modelagem na
Educação Matemática

Informações sobre as Autoras:

Priscila de Castro Barros Greca

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
(UTFPR – Londrina)
priscilagreca@gmail.com

Karina Alessandra Pessoa da Silva

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
(UTFPR – Londrina)
karinasilva@utfpr.edu.br

Prática de Modelagem Matemática em uma Atividade sobre Volume de Balões

Resumo

Esse artigo traz o relato da primeira experiência em desenvolver uma atividade de modelagem matemática com uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública do norte do Paraná. Foram descritos o embasamento teórico que norteou o desenvolvimento da atividade de modelagem, bem como o relato sobre como ocorreu a prática em sala de aula. Por meio da atividade de modelagem sobre volume de balões utilizados em festas, emergiram conteúdos matemáticos vislumbrados em Geometria, como volume de prismas e cilindros. Evidenciamos que a atividade despertou o interesse dos alunos pelo tema pois trouxe aplicabilidade e funcionalidade ao conteúdo matemático ensinado.

Palavras-chave: Prática Pedagógica. Experimentação. Geometria.

Abstract

This paper reports the first experience in developing a mathematical modeling activity with a 9th grade elementary school class at a public school in norther Paraná. The theoretical basis that guided the development of the modeling activity was described, as well as the report on how the practice took place in the classroom. Through the modeling activity on the volume of balloons used in parties, mathematical contents emerged in Geometry, such as the volume of prisms and cylinders. We showed that the activity aroused the interest of students in the subject as it brought applicability and functionality to the mathematical content taught.

Keywords: Pedagogical Practice. Experimentation. Geometry.

Realização:





Introdução

O presente relato traz resultados de uma prática com atividade de modelagem matemática vivenciada pela primeira autora em sala de aula. O planejamento da prática se deu em uma disciplina de Modelagem Matemática do mestrado profissional de uma universidade pública. A atividade relatada foi desenvolvida no período regular das aulas com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de um colégio de ensino integral em uma cidade localizada na região norte do estado do Paraná.

A proposta teve como objetivo desenvolver uma atividade de modelagem matemática com foco no ensino de geometria, para abordar o conteúdo de volume de prismas e pirâmides que faz parte do planejamento do 9º ano do Ensino Fundamental. Foram utilizados conceitos e fórmulas da geometria como a do volume de prismas e cilindros, visando além do ensino de geometria, ensinar outros conteúdos que emergiram no decorrer da atividade. Para isso, nos subsidiamos na modelagem entendida como alternativa pedagógica que pode ser orientada por meio de fases da modelagem matemática, como sugerido por Almeida e Silva (2014): Inteiração, Matematização, Resolução, Interpretação de Resultados e Validação. Essas autoras defendem que a transição entre a situação inicial e a final não acontece sempre da mesma maneira, porém caracteriza o conjunto de procedimentos necessários para a configuração, estruturação e resolução de uma situação-problema.

O desenvolvimento da atividade ocorreu em cinco aulas de 50 minutos cada, sendo a primeira aula em um dia e as outras quatro no dia seguinte. A primeira aula foi onde ocorreu a Inteiração 'propriamente dita', pois os alunos começaram a ser informados sobre a temática, levantaram informações necessárias para o desenvolvimento da atividade e a partir da segunda aula, começaram a desenvolver as outras fases da modelagem matemática. No entanto, entendemos que não se pode separar totalmente as fases, pois no decorrer da atividade, os alunos se depararam com situações que precisaram recorrer a novas informações, onde a inteiração se deu em vários momentos ao longo do trabalho.

Levando em consideração o ambiente de aprendizagem quando se traz problemas do mundo real e os alunos participam de todo o processo da resolução desse problema, esse se envolve com a temática e tem um papel ativo no processo de construção de seu conhecimento. Além disso, a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018), cita que currículos têm papéis complementares para assegurar as aprendizagens essenciais definidas para cada etapa da Educação



Básica e, considerando a autonomia de cada instituição escolar, cabe aos professores selecionar e aplicar metodologias e estratégias didático-pedagógicas diversificadas.

Para estruturar e apresentar os resultados de nossa experiência, organizamos este texto em três seções subsequentes. Na primeira delas, tratamos do nosso entendimento sobre modelagem matemática. Em seguida, apresentamos o encaminhamento da atividade em sala de aula. Por fim, destacamos algumas considerações sobre a experiência vivenciada.

Modelagem matemática

As pesquisas na área de Educação Matemática vêm crescendo e elas são muito claras a respeito de quando o aluno se interessa pelo assunto a ser trabalhado, se envolve com a temática e participa do processo de solucionar problemas do mundo real, ele constrói conhecimentos além do trabalho em grupo que traz inúmeros benefícios além de ser importante na atualidade. Uma alternativa pedagógica que vai ao encontro dessa perspectiva é a Modelagem Matemática.

O aluno que trabalha com a Modelagem Matemática vive experiências, consegue resolver as situações-problema e assume um papel importante na construção de seu conhecimento. O professor deixa de apenas transmitir o conhecimento e passa a ser um orientador de todo o processo. De acordo com Almeida e Silva (2014, p. 14),

o professor deixa de ser um expositor e passa a ser um orientador que atua, muitas vezes, em caminhos não vislumbrados por ele na preparação de sua aula. Isso porque o caminhar é do aluno e não dele – cabe ao aluno criar hipóteses, testá-las, resolver um problema e decidir se a solução é ou não satisfatória.

Segundo Almeida e Silva (2014), podemos caracterizar as fases relativas da Modelagem Matemática ao conjunto de procedimentos necessários para a configuração, estruturação e resolução de uma situação-problema, as quais denominam como: Inteiração, Matematização, Resolução, Interpretação de Resultados e Validação. Essas fases são ações que os alunos realizam quando desenvolvem atividades de modelagem. A inteiração é o primeiro contato do aluno com a situação inicial, em que começa a “inteirar-se” pelo tema em estudo, começa a pesquisar informações. Na segunda fase que é a matematização, o aluno transfere aquela situação-problema inicial que geralmente está na linguagem natural para a linguagem matemática, para resolver o problema inicialmente definido. Na fase da Resolução, o aluno constrói um modelo matemático, uma representação subsidiada em estruturas matemáticas, com a finalidade de responder a



situação-problema inicial. E por fim, vem a Interpretação de Resultados e Validação, onde o aluno analisa uma resposta para o problema.

Em algumas atividades de modelagem, os dados são coletados por meio empírico em que os alunos realizam experimentação. Entendemos que a Modelagem Matemática aliada à experimentação pode proporcionar a interação entre os sujeitos envolvidos e a participação ativa do estudante na construção do seu conhecimento, envolvendo-o e relacionando a matemática com outras áreas do conhecimento. Carreira e Baioa (2011) afirmam que a experimentação consiste em um tipo particular de Modelagem, com base em três fatos:

(1) Os alunos têm a oportunidade de aprender fazendo (enquanto executam manipulação e experimentação reais, se engajam em conjecturar e validar). (2) Trabalhar com materiais físicos concretos é uma maneira de investigar as propriedades matemáticas dos objetos. (3) Investigar por meio da experimentação reflete sobre ações mentais e sobre a aprendizagem subsequente de ideias matemáticas e se torna uma maneira de desenvolver compreensão de modelos matemáticos (CARREIRA; BAIÓIA, 2011, p. 214).

Nessa perspectiva, no contexto educacional, de acordo com Lorenzato (2010, p. 72), “a experimentação é um processo que permite ao aluno se envolver com o assunto em estudo, participar das descobertas e socializar-se com os colegas”. O autor comenta que, no primeiro momento, a experimentação é a ação sobre a manipulação de objetos, porém a importância da manipulação reside no poder que ela tem de conseguir provocar raciocínio, reflexão e construção do conhecimento. Fazendo uma relação com as fases da Modelagem e a experimentação, elas se articulam pois segundo Lorenzato (2010, p. 72): “A experimentação facilita que o aluno levante hipóteses, procure alternativas, tome novos caminhos, tire dúvidas e constate o que é verdadeiro, válido, correto ou solução”.

A modelagem matemática vem ganhando espaço na área da Educação Matemática a partir do ano 1980, porém professores apresentam inúmeras incertezas e obstáculos em relatos de sucessos e insucessos em atividades de modelagem nas aulas de matemática (CEOLIM, 2015). Existem muitos benefícios, porém a prática com atividades de modelagem deve respeitar as especificidades de cada ambiente escolar, em especial aos alunos, professores e à própria estrutura escolar.

Blum e Niss (1991) sugerem algumas possibilidades para a incorporação de atividades de modelagem matemática no âmbito educacional por meio de quatro caracterizações, são elas: uma é a alternativa de separação, ou seja, desenvolver as atividades de modelagem em aulas



extracurriculares; outra é a de combinação, que seria utilizar a modelagem como forma de abordar os conteúdos matemáticos durante as aulas; existe ainda a alternativa da integração curricular que seria os problemas como ponto de partida a partir da necessidade; e a alternativa pedagógica interdisciplinar integrada em que haveria uma completa integração entre as atividades extra matemáticas e matemáticas em uma estrutura curricular interdisciplinar.

Diante dessas caracterizações, o presente relato se deu pela alternativa de combinação, pois a primeira autora desenvolveu a atividade para abordar os conteúdos constantes do planejamento para o 9º ano do Ensino Fundamental.

Relato do desenvolvimento da atividade

A atividade foi desenvolvida durante cinco aulas regulares de 50 minutos cada, com 23 alunos do 9º ano B do Ensino Fundamental de um colégio estadual localizado no norte do Paraná, reunidos em 5 grupos. Os dados que subsidiaram nossa experiência foram coletados por meio de imagens, áudios e vídeos durante as aulas. Utilizamos a designação Aluno seguida de uma letra para diferenciar os alunos da turma, bem como para manter o anonimato deles.

A atividade desenvolvida, sob a problemática “Como medir o volume de ar de Balões?”, foi planejada durante a disciplina Modelagem Matemática, de um mestrado profissional no qual a professora é aluna regular. A motivação em desenvolver essa atividade com os alunos deu-se devido ao desfile de sete de setembro, em que as escolas participam. Nesse ano de 2022, a professora propôs aos alunos do 9º ano que sugerissem à direção da escola que cada aluno desfile com um balão nas cores verde ou amarelo, enchidos com gás hélio, para que no final do desfile eles soltem-no. Essa motivação gerou uma situação-problema em que os alunos precisariam resolver matematicamente, se a ideia que eles tiveram de soltar os balões para o céu ficaria viável do ponto de vista financeiro.

A partir do conhecimento da temática por parte dos alunos, a professora iniciou a primeira aula com o problema: Qual o valor a escola terá que desembolsar para realizar essa atividade? Alguns questionamentos foram feitos pela professora nesse momento:

Professora: Como calcular o volume de ar dentro da bexiga¹?

Aluno A: Tem que pegar as medidas enchida dela.

¹ O termo bexiga é utilizado com mais frequência pelos alunos e pela professora. Assim, quando esse termo se fizer presente no corpo do texto se refere a balões utilizados em festas de aniversário.

Professora: A bexiga é um sólido geométrico regular definido? A bexiga é uma esfera? Uma pirâmide?

Aluno B: Um círculo.

Aluno C: Uma esfera.

Professora: De todos os sólidos geométricos que temos, a esfera seria o sólido mais próximo da bexiga, mas não chega a ser uma esfera certinha. E existem outros meios de calcular o volume de uma bexiga. E é isso que vocês vão pesquisar agora na internet. Como calcular o volume de sólidos geométricos que não tenha formato definido? Na aula de hoje será somente para a pesquisa.

Durante a primeira aula, os alunos se dirigiram para a biblioteca da escola pois lá tem *wifi* disponível e eles se sentaram com quem tinham mais afinidade, organizando-se em cinco grupos de 3 a 4 alunos em cada um deles (Figura 1).

Figura 1 – Momento da pesquisa



Fonte: Arquivo da professora.

Durante a pesquisa foram feitos alguns questionamentos dos alunos para a professora que ia passando pelos grupos.

Grupo 4

Aluno A: Achei como calcular. Pega um objeto 'retângulo' que é fácil de calcular e enche ele de água e marca onde a água vai. Coloca a bexiga cheia de água ali e anota onde a água vai. E depois subtrai a diferença.

Professora: Será que a bexiga com água afunda? E com ar afunda?

Aluno A: Com ar boia e com água afunda.

Professora: E se colocar a água na bexiga altera o volume da bexiga?

Aluno A: Aí não sei professora.

Professora: Então na próxima aula seu grupo irá medir para verificar na prática.



Grupo 3

Aluno B: Professora, achei uma forma mais simples de fazer. Só encher a bexiga com água e depois transferir a água num frasco graduado.

Professora: Então na próxima aula seu grupo irá medir dessa forma.

Grupo 2

Aluno C: Enche a bexiga para tirar a medida e determina a circunferência e o raio do balão, passe uma fita métrica no centro do balão para determinar a circunferência dele e para determinar o raio coloque duas réguas entre a bexiga em pé e meça a distância entre elas e divida o valor pela metade. Daí usa a fórmula do volume de uma esfera.

Professora: Então na próxima aula seu grupo irá medir dessa forma.

A partir das transcrições supracitadas, evidenciamos que os alunos pesquisaram como calcular o volume de uma bexiga e encontraram vários métodos, entre eles: encher a bexiga de água e depois transferir essa água para uma vasilha graduada; encher a bexiga com água e depois medir a massa numa balança, medir o raio da bexiga como se fosse uma esfera e calcular pela fórmula e dois grupos pesquisaram sobre o método de calcular o volume pelo princípio de Arquimedes que seria calcular o volume da bexiga submersa na água pela diferença entre os dois volumes dos níveis de água. Mesmo considerando esses diferentes métodos, os grupos optaram por realizar procedimentos como apresentado no Quadro 1.

Quadro 1 - Grupos e procedimentos utilizados

GRUPOS	PROCEDIMENTO UTILIZADO
GRUPO 1	Encheu a bexiga com água, mediu a massa com a balança e transferiu a água para o copo graduado.
GRUPO 2	Mediu o diâmetro da bexiga com régua para calcular o volume da bexiga pela fórmula do volume da esfera, porém uma das alunas percebeu que o formato da bexiga não era de uma esfera e desistiram. Resolveram medir o volume da bexiga pelo princípio de Arquimedes em um balde cilíndrico.
GRUPO 3	Encheu a bexiga com água e transferiu a água para o copo graduado.
GRUPO 4	Mediu o volume da bexiga pelo princípio de Arquimedes numa caixa de duas maneiras: com a bexiga enchida com ar e depois encheram a bexiga com água.
GRUPO 5	Mediu o volume da bexiga pelo princípio de Arquimedes numa panela cilíndrica.

Fonte: Dos autores.

Para finalizar esse momento de pesquisa, a professora passou um vídeo para a turma toda sobre o método de calcular o volume pelo princípio de Arquimedes, pois a intenção dessa aula era que, além deles aprenderem como calcular volume de figuras irregulares, já exploraria o conteúdo de Volume de Prisma e de Cilindro.

No dia seguinte, em três aulas consecutivas, os alunos juntamente com a professora foram ao refeitório do colégio para a realização do experimento prático. Para isso, levaram todos os materiais necessários: bexigas tamanho 7, molde de bexigas, balança, copo graduado, réguas,

baldes, panelas, caixa plástica. Para o início da atividade, a professora pediu para todos encherem as bexigas e deixá-las do mesmo tamanho, utilizando um medidor de bexigas, conforme a foto da Figura 2.

Figura 2 – Medindo uma das bexigas



Fonte: Arquivo da professora.

O Grupo 1, que optou pelo processo de encher a bexiga com água, mediu a massa da bexiga cheia com água, obtendo 3200 gramas e depois esvaziou-a num copo graduado de 500 ml e verificaram que foram necessários 7 copos para esvaziar, então eles falaram que deu cerca de 3 litros de água o volume da bexiga, conforme mostra a figura 3.

Figura 3 – Medindo a bexiga com água



Fonte: Arquivo da professora.

O Grupo 4 optou por utilizar o princípio de Arquimedes numa caixa, conforme mostram as fotos da Figura 4.

Figura 4 – Utilizando o Princípio de Arquimedes em um prisma

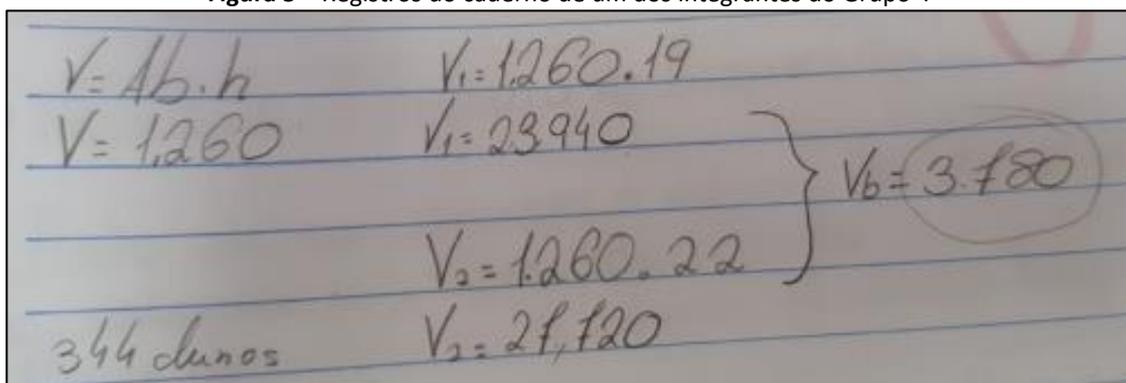


Fonte: Arquivo da professora.

Para o cálculo do volume, os alunos, utilizando as medidas da base da caixa, bem como a altura antes de mergulhar a bexiga, utilizaram a expressão $V = A_b \cdot h$ e obtiveram 23940 cm^3 . Realizaram os mesmos procedimentos considerando a altura que a água atingiu com a bexiga submersa e obtiveram o volume de 27720 cm^3 . Para isso, desconsideraram o volume dos dedos e parte da mão no momento que mergulharam a bexiga.

Após realizar a diferença do volume da água antes e depois da bexiga imersa, o Grupo 4, determinou que o volume da bexiga era de 3.780 cm^3 , conforme mostra o registro escrito apresentado na Figura 5.

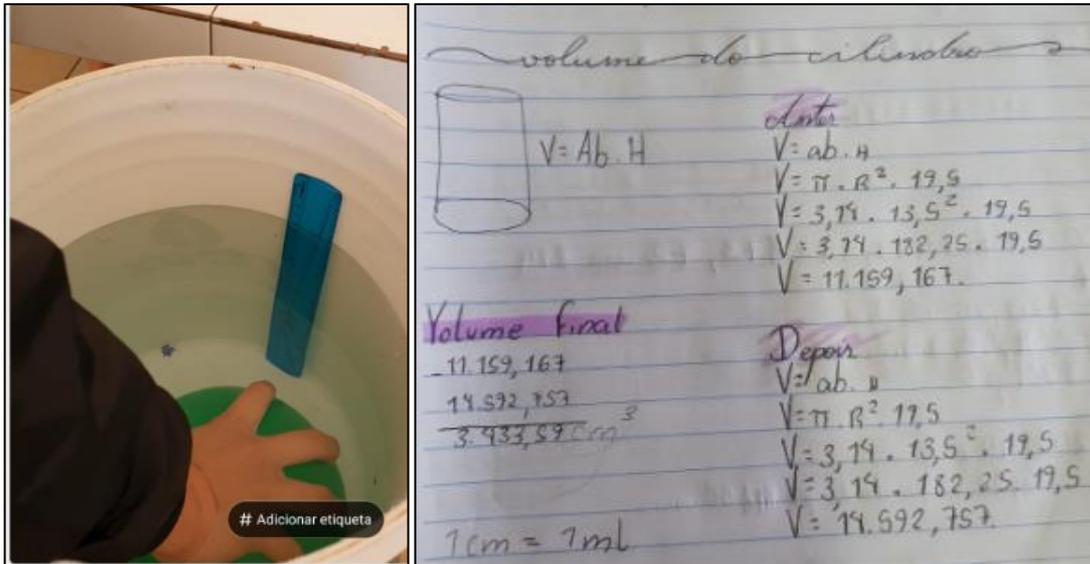
Figura 5 – Registros do caderno de um dos integrantes do Grupo 4



Fonte: Relatório dos alunos.

O Grupo 5, utilizou uma panela com formato cilíndrico para fazer o procedimento do cálculo do volume pelo Princípio de Arquimedes, conforme mostram as fotos da Figura 6.

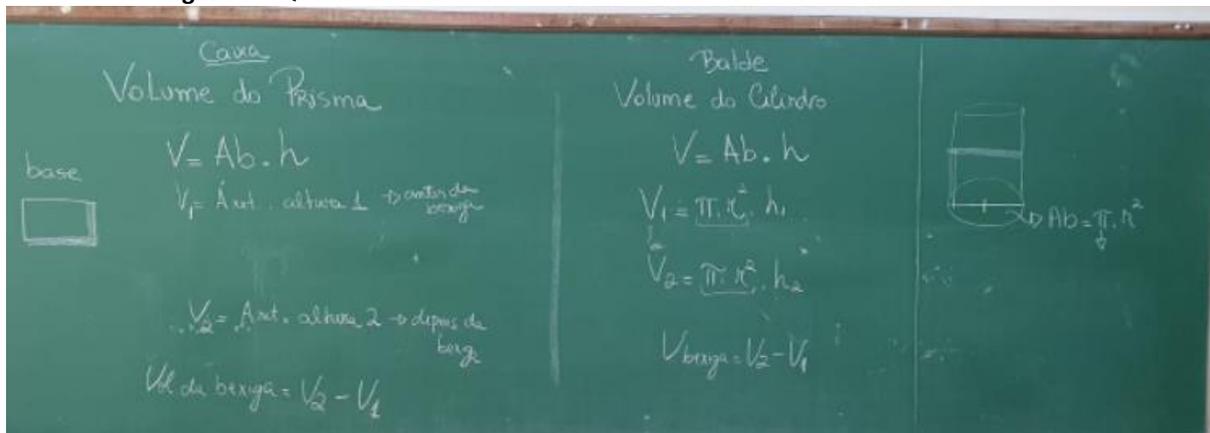
Figura 8 – Princípio de Arquimedes em um balde cilíndrico e registros no caderno do Grupo 2



Fonte: Arquivo da professora.

No próprio refeitório, a professora explicou aos grupos como calcular os volumes do prisma ou do cilindro, conforme eles iam questionando. Conforme foram terminando a atividade prática, voltaram para a sala de aula, onde a professora sistematizou no quadro o volume desses dois sólidos (Figura 9).

Figura 9 – Quadro da sala de aula com as fórmulas do Volume de Prisma e Cilindro



Fonte: Arquivo da professora.

Para responder o problema: Qual o valor que a escola terá que desembolsar para realizar essa atividade? Os alunos precisaram pesquisar os valores de bexigas, do gás hélio e determinar a quantidade de gás hélio a ser utilizada. Então voltaram para a biblioteca para fazer a pesquisa na internet. Além disso, foram na secretaria para saber a quantidade de alunos matriculados na escola, em que a secretária forneceu o total de 344 alunos. Sintetizamos no Quadro 2 os valores encontrados pelos grupos.



Quadro 2 – Respostas dos grupos com os valores totais

	GRUPO 1	GRUPO 2	GRUPO 3	GRUPO 4	GRUPO 5
VOLUME TOTAL DE GÁS HÉLIO	3.433,59 cm ³	4.327,31 cm ³	3.780,00 cm ³	3.780,00 cm ³	4.948,00 cm ³
VALOR TOTAL DAS BEXIGAS	R\$ 84,00	R\$ 69,86	R\$ 56,00	R\$ 74,00	R\$ 102,96
VALOR DO GÁS HÉLIO	R\$ 720,20	R\$ 3.044,00	R\$ 807,41	R\$ 2.400,00	R\$ 2.399,80
TOTAL	R\$ 804,20	R\$ 3.113,86	R\$ 863,41	R\$ 2.474,00	R\$ 2.502,96

Fonte: Das autoras.

Ao observar os resultados, percebemos uma divergência entre os valores do gás hélio. Então, a professora propôs aos alunos a pesquisarem novamente os valores para observar o motivo que os preços variavam tanto. Durante a pesquisa, os grupos que obtiveram menor valor, estavam considerando comprar apenas a recarga do gás, mas precisariam acrescentar o valor da compra do cilindro vazio que estava em torno de R\$ 1.300,00 a R\$ 1.500,00, o que justificou o motivo da variação do preço entre os grupos. Durante essa parte final da atividade, um dos grupos ligou para uma casa de festas para fazer um orçamento para encher os balões com gás hélio, e o valor cotado foi de R\$ 11,50 por balão, como na atividade os alunos fizeram o cálculo para 344 balões, o valor total cotado por essa empresa ficou em R\$ 3.956,00, um valor acima do preço encontrado pelos grupos, inclusive com a compra do cilindro.

Durante a atividade, a parte que os alunos tiveram dúvidas foi para achar a quantidade de balões que um galão de gás hélio iria encher. Nesse momento, a professora orientou-os a pesquisarem como converter os centímetros cúbicos em litros ou metros cúbicos.

A validação dessa atividade de modelagem matemática se deu através da comparação entre os valores obtidos pelos grupos do volume da bexiga ser próximo um dos outros, e mesmo o grupo que mediu com água a bexiga, o valor entre água e ar embora fossem diferentes, eram próximos.

Considerações finais

Desde o momento em que começaram a atividade com a problematização, os alunos se envolveram em todo o processo, se empolgaram e utilizaram todo o tempo disponível das aulas para solucionarem o problema definido inicialmente. Segundo Bassanezi (2010, p. 16), “a



modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”.

A maior parte do tempo, trabalharam conceitos matemáticos, viam a importância da necessidade matemática para resolver situações do cotidiano e algumas vezes precisavam buscar conteúdos que ainda não conheciam através do auxílio da professora, de pesquisas e de troca de informações entre os próprios alunos.

Como primeira atividade de modelagem desenvolvida pela professora, serviu como motivação para desenvolver outras, pois essa atividade gerou resultados satisfatórios, como o engajamento da turma e o professor abordou novos conteúdos de uma forma não convencional.

O conteúdo matemático que emergiu do desenvolvimento dessa atividade faz parte da matriz curricular da disciplina de Matemática no 9º ano, porém está localizado para ser desenvolvido no final do ano letivo, conforme proposta do livro didático adotado pela Secretaria de Estado da Educação. Todavia, entendemos que o livro didático é um material de apoio para o professor planejar e desenvolver suas aulas e que não precisa ser trabalhado de forma linear.

Referências

ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P. **Modelagem Matemática em Foco**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2014.

BASSANEZI, R.C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. São Paulo: Contexto, 2010

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BLUM, W.; NISS, M. Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects – state, trends and issues in mathematics instruction. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 22, n. 1, p. 37-68, feb. 1991.

CARREIRA, S.; BAILOA, A. M. Students’ modelling routes in the context of objects manipulation and experimentation in mathematics. In: KAISER, G.; BLUM, W.; BORROMEO FERRI, R.; STILLMAN, G. (Eds). **Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling**. New York: Springer, 2011, p. 211-220.

CEOLIM, A. J. **Modelagem Matemática na Educação Básica: obstáculos e dificuldades apontados por professores**. 2015. 151p. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2015.

LORENZATO, S. **Para aprender matemática**. Campinas SP: Autores Associados, 2010.