GEOMETRIA DO TÁXI NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA: TECNOLOGIAS COMO APORTE NA APRENDIZAGEM

Beatriz dos Santos Silva
Universidade Estadual de Londrina
beatriz.tobias@uel.br

Talisson Fernando Leria
Universidade Estadual de Londrina
talisson.fernando90@uel.br

Resumo
O presente artigo tem como objetivo discutir fatores históricos pertencentes ao movimento de constituição do conhecimento geométrico, em especial às métricas não euclidianas, e apresentar possibilidades para a inserção da Geometria do Táxi na formação de professores que ensinam Matemática por meio do uso de tecnologias. Para isso, propomos que o uso de *softwares* de geometria dinâmica e de geolocalização possam contribuir com a exploração de situações que promovam a compreensão de professores/futuros professores que ensinam Matemática a respeito de modelos geométricos não euclidianos. A investigação desenvolvida, de caráter qualitativo, almeja contribuir com reflexões e pesquisas futuras que abordem as possibilidades e potencialidades do uso tecnologias como aporte na aprendizagem de conceitos de Geometrias não Euclidianas, em contextos de formação inicial e continuada de professores que ensinam Matemática.

Palavras-chave: Geometrias não Euclidianas. Geometria do Táxi. Formação de Professores. Educação Matemática.

Introdução

A Matemática produzida, historicamente, pela humanidade foi utilizada para compreender, elencar, explicar e solucionar problemas cotidianos dos indivíduos em várias culturas e momentos históricos. Enquanto área do conhecimento científico, se desenvolveu a partir de sofisticações teóricas e conceituais oriundas de observações empíricas de tais problemas cotidianos, que se tornavam mais complexos à medida que as sociedades avançavam.

É possível identificar preocupações com o ensino da Matemática já na antiguidade, como em *República VII*, de Platão, mas é a partir da Idade Média, do Renascimento e dos primeiros passos da Idade Moderna que essas preocupações são colocadas em foco. Após as três grandes revoluções da modernidade ocorre a identificação da Educação Matemática como eixo prioritário na educação, com o matemático alemão Felix Klein tomando a frente na defesa de que a Matemática, enquanto disciplina escolar, se apoie mais em bases psicológicas do que sistemáticas. Esse modo de conceber o ensino de Matemática leva o docente a assumir a postura de diplomata, apresentar os conceitos de modo intuitivamente compreensível, levando em conta o processo psíquico do aluno em uma disciplina dinâmica, viva e cotidiana.

Durante séculos a Geometria Euclidiana foi utilizada como o principal modelo para análise do espaço físico nos campos de pesquisa da Matemática e das Ciências, sendo a principal área do conhecimento para expressar o espaço e suas propriedades. O resultado foi um "congelamento" do conhecimento geométrico por quase dois mil anos, tomando como verdadeiro apenas o sistema euclidiano. Ao longo dos anos, o ensino de Geometria tem sido praticado de forma axiomática, com destaque no período do Movimento da Matemática Moderna em que o foco se deu nas formalidades e no rigor dos fundamentos da Teoria dos Conjuntos e da Álgebra, objetivando aproximar o conteúdo ensinado nas escolas com o conteúdo matematicamente produzido por especialistas e cientistas da área matemática. As ideias advindas desse movimento ecoaram na formação de professores, no qual o rigor e a formalidade matemática se destacavam em detrimento de reflexões históricas e filosóficas a respeito da construção deste conhecimento tão importante para o avanço da humanidade.

Pesquisas na área da Educação Matemática revelam as dificuldades, de estudantes e professores, ao trabalhar com os conteúdos de Geometria na Educação Básica (BARROS; PAVANELLO, 2022; PAVANELLO, 1993). Conteúdos geométricos são, muitas vezes, abordados ao final dos períodos letivos, de meados até o final do 3º trimestre, com exposições de conceitos e fórmulas que podem ser utilizados em resoluções de problemas.

Nos últimos anos, o debate sobre o ensino de Geometria passou a englobar reflexões acerca da incorporação de Geometrias não Euclidianas na Educação Básica, fomentadas em instituições de ensino e em associações de profissionais da Matemática (KALEFF, 2010; PEREIRA; BORGES, 2017). Um fato que incitou o debate e produções acadêmicas sobre o tema foi a inclusão das referidas Geometrias no documento das Diretrizes Curriculares Estaduais do Paraná - DCE - (PARANÁ, 2008). Tal inclusão levanta questionamentos sobre se os professores que ensinam Matemática mobilizaram conhecimentos necessários para o trabalho com Geometrias não Euclidianas na escola básica. Em relação aos conhecimentos geométricos, Kaleff e Nascimento (2004) afirmam que

> Estes conhecimentos evoluíram, tanto em decorrência do surgimento de diversas concepções geométricas inovadoras, alternativas à Euclidiana: as Geometrias não-Euclidianas, quanto como consequência de reconsiderações conceituais surgidas ao longo do século XX, decorrentes dos novos conhecimentos advindos do desenvolvimento teórico da Matemática e da ciência da computação (p. 12).

Leivas e Soares (2011) destacam que os cursos de formação de professores de Matemática não incorporaram em seus currículos disciplinas que visam o estudo das Geometrias não Euclidianas, especificamente. Os conteúdos geométricos presentes nos currículos se restringem à Geometria Plana e Espacial e à Geometria Analítica, que podem ser desenvolvidas priorizando a Álgebra em detrimento da Geometria.

Além dos aspectos relacionados ao currículo e à formação dos professores de Matemática, também devemos considerar as mudanças realizadas para garantir a sequência das atividades escolares durante o período da pandemia de Covid-19. O distanciamento social forçou as instituições educacionais a adotarem o ensino remoto como alternativa imediata. O uso de tecnologias em ambientes escolares assumiu uma mudança em relação a sua utilização até então, visto unicamente como recurso metodológico de ensino, tornando-se uma necessidade pedagógica emergente. Esse novo paradigma educacional levou ao aumento do uso de tecnologias de comunicação no ensino à distância, como plataformas de videoconferência, conteúdos digitais e ambientes virtuais de aprendizagem, abrindo oportunidades para a inovação pedagógica.

Diante do exposto, a proposta do presente artigo é refletir a respeito dos fatores históricos relacionados ao desenvolvimento do conhecimento geométrico, com ênfase especial às métricas não euclidianas, e discutir a sua inserção na formação, inicial e continuada, de professores que ensinam Matemática, considerando o uso de tecnologias nestes contextos.

Da Geometria Euclidiana às não Euclidianas

A Geometria, assim como outras áreas, se caracterizou enquanto campo do conhecimento por contribuição de diversos povos e momentos históricos. Seu início, datado desde a antiguidade, avançou de forma gradual até sua dimensão atual, e sua origem é oportuna em um mundo físico com formas e tamanhos diferentes e seres humanos com a capacidade de transformar os espaços em que se inserem. O conhecimento geométrico progrediu de noções fundamentais de forma, distância e paralelismo até conceitos envolvidos na detecção de ondas gravitacionais. Vale destacar que o homem primitivo compreendeu, também, as ideias de superfícies e curvas assentes em observações de sua vida cotidiana (EVES, 1992).

Os problemas enfrentados pelo homem primitivo e as tentativas de solução foram as primeiras descobertas geométricas, mesmo sem terem essa intencionalidade. Assim, quando ferramentas para pesca e caça foram desenvolvidas, a demarcação de terras se fez necessária e a vida nômade passou a exigir deslocamentos de grandes distâncias, nasceu a Geometria de natureza prática. Posteriormente, surgiram construções mais rebuscadas e o homem começou a olhar para o céu de forma diferente e, intrínseco a isto, as formas de registro tornaram-se cada vez mais elaboradas, assim como os conceitos geométricos, até então práticos. Através da observação das formas, tamanhos e relações entre entes físicos, foi razoável à inteligência humana extrair propriedades gerais de relações particulares.

A Matemática praticada na Grécia durante os séculos V e IV a.E.C. parecia não se preocupar com o uso de procedimentos heurísticos e informais. No meio dos filósofos, as técnicas usadas pelos matemáticos eram criticadas e Platão, por volta de 375 a.E.C., questionou os geômetras sobre os critérios de rigor necessários à prática matemática. Os primeiros matemáticos gregos desempenhavam uma Geometria baseada em cálculos de medidas, como outras civilizações da Antiguidade, mas não há documentação histórica suficientemente confiável que estabeleça o movimento de transição da Matemática mesopotâmica e egípcia para a Matemática dos gregos. Esse fato se torna uma etapa na construção do mito de que havia uma única matemática geral da humanidade, mas a falta de documentação nos permite afirmar a presença de várias expressões matemáticas pelo mundo (ROQUE, 2012).

Com a cultura grega, a Geometria demonstrativa se desenvolveu junto com a noção de aperfeiçoamento intelectual dos indivíduos a partir dos estudos e, com eles, a Geometria de caráter axiomático e dedutivo surge. Na coleção "Os Elementos", Euclides de Alexandria organiza uma síntese do conhecimento geométrico produzido até aquela época em um esquema lógico-dedutivo assentado em axiomas e postulados, organizados para permitir provas de teoremas matemáticos e inferências entre eles, cujo nome recebido é Geometria Euclidiana. Composta por treze livros, a obra exerce influência no modo de conceber a Matemática e seu ensino até os dias atuais.

> A maior parte dos teoremas nela incluídos foi descoberta por outros geômetras, embora várias das provas sejam originais de Euclides e outras tenham sido refeitas ou aperfeiçoadas por ele. O toque de gênio de Euclides está não na descoberta de teoremas, o que ele certamente fez, mas na organização lógica com que os apresentou e provou de forma rigorosa e concatenada, preenchendo as lacunas deixadas por outros (GARBI, 2010, p. 58).

Alguns dos matemáticos que desenvolveram e aperfeiçoaram técnicas matemáticas para resolução de problemas (como a aproximação de círculos por polígonos e as meias proporcionais para a duplicação do cubo) eram próximos de Platão e constituíam a Academia, o que levou a uma convergência entre os interesses filosóficos e geométricos da época. Então, no contexto dos séculos IV e III a.E.C. cabia uma questão importante: teria o campo da Geometria alcançado uma dimensão de tamanho considerável a ponto de ser necessário o classificar segundo critérios formais?

A descrição da Geometria a partir dos postulados de Euclides foi hegemônica durante séculos, e apenas no decorrer do século XIX, entre os estudos no campo da axiomática, que alguns pontos propostos por Euclides começaram a ser reformulados. O quinto postulado é conhecido como

"Postulado das Paralelas" após a reformulação feita por John Playfair, em 1765, e foi colocado à prova por muitos matemáticos e filósofos que buscavam confirmá-lo dentro da estrutura de rigor matemática necessária a qualquer teoria.

A partir do século XIX, três matemáticos sinalizaram, quase ao mesmo tempo, a possibilidade de uma Geometria sem o quinto postulado. Boyer (1974, p.396) diz que "(...) um assombroso exemplo de simultaneidade de descoberta, pois noções semelhantes ocorreram, durante o primeiro terço do século dezenove, a três homens, um alemão, um húngaro, e um russo". O russo, Nicolai Ivanovich Lobachevsky, publicou o artigo "On the Principles of Geometry" que intitulou a geometria envolvida de "Geometria Imaginária", hoje nomeada por "Geometria Hiperbólica". Em seus trabalhos, elaborou uma nova geometria que permitia mais de uma reta paralela a uma reta dada traçada por um ponto, em que a soma dos ângulos internos de um triângulo, ali, seria menor que 180°. Nas próximas décadas, se dedicou a exposições completas sobre essa geometria.

O húngaro Janos Bolyai, acreditou na possibilidade de uma Geometria abrangente, na qual a geometria euclidiana seria uma instância específica. Ao negar o quinto postulado de Euclides, concluiu que a presença de mais de uma reta paralela a uma reta dada, passando por um ponto, implica na existência de um número infinito delas.

Georg Friedrich Bernhard Riemann, o alemão, sugeriu, também, uma nova Geometria relacionada ao estudo em superfícies e afirmou que "duas retas nunca são paralelas e a soma dos ângulos de um triângulo é maior que de dois ângulos retos" (EVES, 1992). Segundo Boyer,

> suas geometrias eram não-euclidianas num sentido muito mais geral do que a de Lobachevsky em que a questão é simplesmente a de quantas retas paralelas são possíveis por um ponto. Riemann viu que a geometria nem sequer deveria necessariamente tratar de pontos ou retas ou do espaço no sentido ordinário, mas de coleções de n-uplas que são combinadas segundo certas regras. (BOYER 1974, p. 398).

Ao mostrarem essas novas geometrias, esses matemáticos confirmaram a consistência dos axiomas que a Geometria deriva e que as novas eram tão robustas e teoricamente consistentes quanto a Geometria de Euclides. Embora a Geometria Euclidiana e as não Euclidianas distem cerca de 20 séculos, suas histórias se relacionam diretamente e ilustram cenários de conflito que levaram matemáticos do século XIX a uma crise de fundamentos. Tal crise impactou o modo de conceber a própria Matemática enquanto Ciência.

O movimento histórico do desenvolvimento de conceitos e ideias matemáticas é orgânico e é resultado da atividade humana. Romper com o senso comum que trata a Matemática como exata, dada e inquestionável é fundamental para quem pretende aprendê-la e ensiná-la. Acreditamos que o estudo de Geometrias não Euclidianas colabore com esse rompimento.

Diferenciação entre as Geometrias Euclidianas e não Euclidianas: a Geometria do Táxi

Com a intenção de promover uma reflexão a respeito do ensino das Geometrias na formação de professores que ensinam Matemática, por meio do uso de tecnologias, propomos a exploração da "Geometria do Táxi"[1] como exemplo de modelo geométrico não Euclidiano com condições próprias que, consequentemente, "desvirtuam" conceitos ditos bem definidos na Geometria Euclidiana.

Suponha que exista uma cidade dividida em quarteirões com medida unitária e que as ruas se prolonguem horizontal e verticalmente em uma malha urbana que, convenientemente, pode ser relacionada ao plano euclidiano. Cada ponto no plano corresponde ao cruzamento de duas retas perpendiculares que representam as ruas de uma cidade ideal[2]. A distância das viagens é o trajeto de um táxi. A condição, por consequência, não admite "atravessar" as quadras. Se um cidadão da cidade deseja sair do ponto "A" com destino ao ponto "B", quantas unidades tem o menor trajeto possível?

Na Geometria Euclidiana, a menor distância entre os dois pontos é o segmento de reta que os une. Na Geometria do Táxi, a menor distância entre dois pontos é a soma das unidades de deslocamento no sentido vertical e horizontal. Note que a forma usual de realizar deslocamentos em zonas urbanas é não euclidiana.

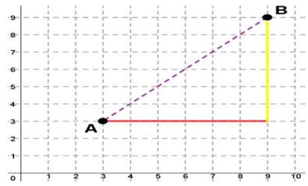
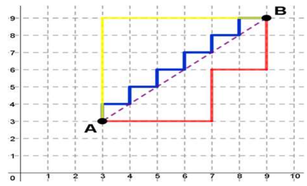
No Quadro 1, a seguir, temos uma comparação entre o cálculo da distância entre os pontos e sua representação geométrica.

Quadro 1 - Comparação entre a Geometria Euclidiana e a do Táxi

	Geometria Euclidiana	Geometria do Táxi
Cálculo da distância	$d_e(A,B) = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$	$d_t(A,B) = \lvert x_a - x_b \rvert + \lvert y_a - y_b \rvert$

[1] Também chamada de Geometria Táxi, Geometria de Manhattan ou Geometria Urbana foi introduzida por Hermann Minkowski (1864-1909).

[2] Denominamos de "cidade ideal" a constituída por vias horizontais e verticais equidistantes. A estrutura conhecida como "malha-táxi" pode ser aplicada em outros contextos mediante a adição de pesos distintos a cada quadra, conferindo características individuais e viabilizando analogias com o mundo real.

Representação geométrica		

Fonte: Os autores (2023).

Então, a distância euclidiana entre o ponto A, que tem as coordenadas (3,3), e o ponto B, com as coordenadas (9,9), é dada por:

$$d_e(A,B) = \sqrt{(3-9)^2 + (3-9)^2}$$
$$d_e(A,B) = \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2}$$
$$d_e(A,B) = \sqrt{36+36}$$
$$d_e(A,B) = \sqrt{72}$$
$$d_e(A,B) \approx 8{,}48$$

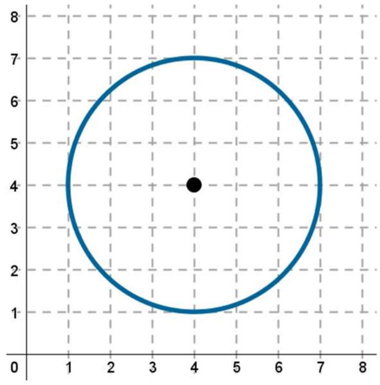
Considerando as coordenadas dos pontos A e B dados anteriormente, temos que a distância entre os eles na Geometria do Táxi é:

$$d_t(A,B) = |3-9| + |3-9|$$
$$d_t(A,B) = 6+6$$
$$d_t(A,B) = 12$$

Note que a noção de distância foi modificada por conta das condições impostas pelo modelo geométrico em questão. Diferentemente da Geometria Euclidiana, que permite apenas um trajeto como o menor possível, na Geometria do Táxi há vários trajetos possíveis (considerando menor distância entre a origem e o destino) que podem ser percorridos entre os dois pontos. Em qualquer um dos trajetos escolhidos a distância percorrida é de 12 unidades.

Outro resultado inusitado da Geometria do Táxi surge quando trabalhamos com a definição de circunferência da Geometria Euclidiana: dado um ponto central fixo, todos os pontos equidistantes dele descrevem uma circunferência. Como exemplo, tomemos a distância dos pontos até o centro como 3 unidades (raio), e ponto central fixo com coordenadas (4, 4). A Figura 1 representa a circunferência descrita de modo euclidiano.

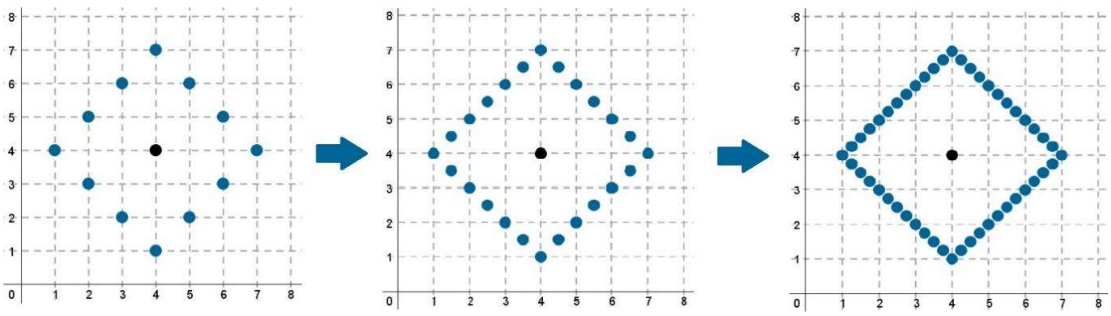
Figura 1 - Circunferência na Geometria Euclidiana



Fonte: Os autores (2023)

Ao aplicarmos a mesma definição de circunferência na Geometria do Táxi, temos uma representação atípica. Conforme o tamanho das quadras da cidade diminui, os pontos que descrevem a "circunferência" tornam-se mais numerosos e se aproximam da representação de um quadrado, chamado de "táxi-circunferência[3]", que pode ser observado na Figura 2.

Figura 2 - Evolução da "circunferência" no modelo do táxi



Fonte: Os autores.

O estudo de outros aspectos, como a relação que gera o número pi e as mediatrizes, continuará explicitando as divergências entre os dois modelos geométricos e pode colaborar na aceitação de métricas diferentes das euclidianas.

Os conceitos e relações construídos até agora podem ser representados em papéis milimetrados, em cadernos e em quadros, mas o uso de *softwares* e aplicativos pode colaborar para a construção de objetos matemáticos, em especial os objetos geométricos, de modo a comparar o modelo geométrico euclidiano e o modelo geométrico do táxi.

Os *softwares* e aplicativos de geometria dinâmica permitem que os estudantes façam construções de representações de objetos geométricos, além de poderem movimentar esta

---

[3] Para visualizar a circunferência na Geometria do Táxi, acesse: https://www.geogebra.org/m/ttmsjthx.

representação de modo que as suas formas e propriedades sejam preservadas, bem como de explorar e investigar as relações entre estes objetos (ZANELLA; FRANCO; CANAVARRO, 2018).

Na aprendizagem de Geometria, os softwares potencializam a percepção visual e a visualização dos estudantes ao manipular seus comandos, na intenção de alterar as posições e as estruturas das representações dos objetos geométricos, de forma que consiga explorar e explicar possíveis relações geométricas percebidas, conjecturar resultados e realizar provas com argumentos convincentes por meio da linguagem matemática, em especial a linguagem geométrica (ZANELLA; FRANCO; CANAVARRO, 2018).

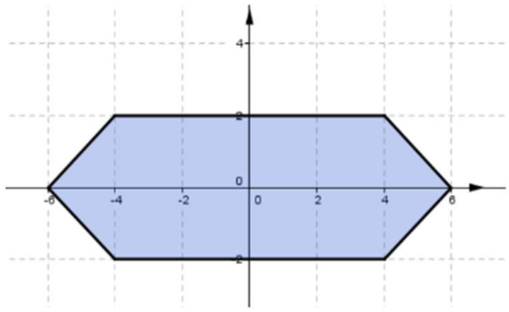
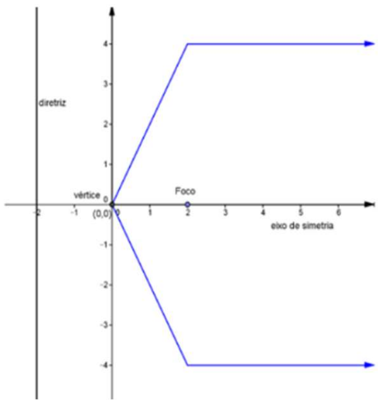
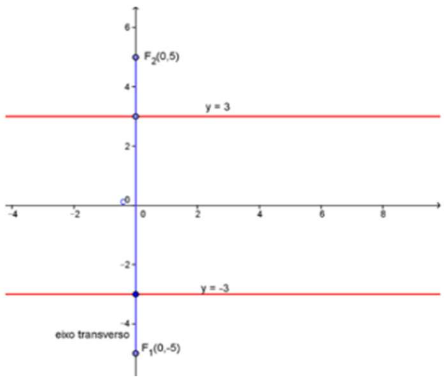
A formação do professor que ensina Matemática e o uso de tecnologias na aprendizagem de Geometrias não Euclidianas

As dificuldades para se ensinar Geometria (BARROS; PAVANELLO, 2022; SILVA; FRANQUEIRA; NASSER, 2019) e a falta de conteúdos geométricos não euclidianos em cursos de formação de professores (LEIVAS; SOARES; 2011) são fatos evidenciados em diversas pesquisas. A concepção de que estes são saberes científicos restritos às investigações de instituições de ensino superior ou cursos formadores de bacharéis em matemática também contribuem para a manutenção de tais barreiras.

Corroboramos com as concepções de Mendes (2006), e defendemos que os processos envolvidos no ensino e na aprendizagem de Geometria possibilitam condições para resultados mais exitosos quando a ação docente considera as conexões que a Geometria nutre com a Álgebra e a Aritmética, discute suas visões histórico-epistemológicas e institui relações entre o cotidiano do aluno e os conteúdos geométricos.

Leivas (2014), propôs que estudantes de uma disciplina de mestrado profissional interpretassem e representassem elipses, parábolas e hipérboles utilizando a métrica advinda da Geometria do Táxi, a qual ele nomeou de métrica dos catetos. A representação geométrica foi elaborada a partir das resoluções algébricas, desmembradas em regiões definidas pelas respectivas leis de formação, das atividades propostas. Neste momento, *softwares* de geometria dinâmica, como o GeoGebra, tornam-se aliados convenientes pois permitem manipulações visuais, explorações ativas e compreensões das condições geométricas necessárias para a construção das representações.

Quadro 2 - Enunciados e representações elaboradas pelos estudantes

Enunciado das atividades	**Representação geométrica**
Considere a base ortonormal canônica o R^2 e use a definição do lugar geométrico chamado elipse para obter sua representação quando a métrica empregada é a dos catetos. Considere o centro na origem, os focos $F_1 = (-4{,}0)$ e $F_2 = (4{,}0)$ com o eixo maior medindo 12 cm.	
Considere a base ortonormal canônica do R^2 e use a definição do lugar geométrico chamado parábola para obter sua representação geométrica quando a métrica empregada é a dos catetos. Considere o vértice na origem, o foco $F = (2{,}0)$ e a diretriz sendo a reta $x = -2$.	
Considere a base ortonormal canônica do R^2 e use a definição do lugar geométrico hipérbole para obter sua representação geométrica quando a métrica empregada é a dos catetos. Considere o vértice na origem, os focos $F_1 = (0,-5)$ e $F_2 = (0{,}5)$ e o eixo real ou transverso medindo 6cm.	

Fonte: Leivas, 2014 (adaptado).

A construção de elipses[4], parábolas[5] e hipérboles[6] no GeoGebra possibilita a visualização interativa e a experimentação livre dos elementos das construções, além de facilitar a criação de modelos geométricos específicos.

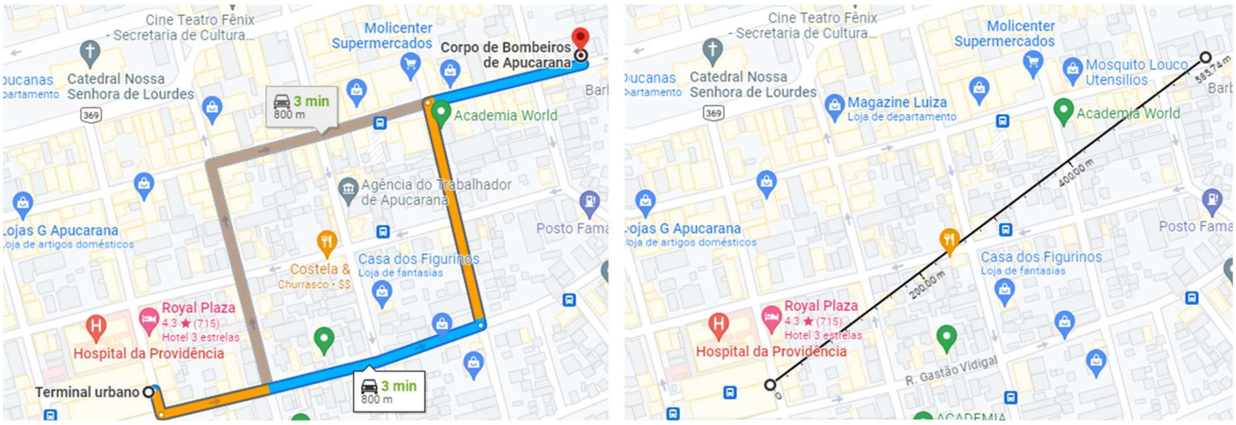
[4] Modelo manipulável disponível em: https://www.geogebra.org/m/jn8derbz.

[5] Modelo manipulável disponível em: https://www.geogebra.org/m/q38b5twm.

[6] Modelo manipulável disponível em: https://www.geogebra.org/m/cffvthnb.

Outro recurso tecnológico pertinente no estudo da Geometria do Táxi é o *Google Maps*. O aplicativo é uma ferramenta de mapeamento e navegação que permite visualizar a estrutura de ruas, avenidas e travessias de forma clara e objetiva. A possibilidade de analisar a configuração do mundo real, utilizar as ferramentas de medidas de distância (euclidianas e não euclidianas) e interagir em um ambiente com duas e três dimensões de forma integrada explicitam o potencial pedagógico do aplicativo em questão.

Figura 3 - Ferramentas de medida disponíveis no *Google Maps*



Fonte: Google (2023)

A contraposição dos conceitos da Geometria do Táxi com a Geometria Euclidiana possibilita a visualização das possíveis representações de objetos geométricos, ilustrando, de forma clara, a dinamicidade da Matemática e como as suas "certezas" podem não ser tão certas assim.

Destacamos como possíveis contribuições do estudo da Geometria do Táxi na formação de professores que ensinam Matemática: ampliação de horizontes conceituais, que permitem compreensões mais abrangentes de Geometria e Matemática; abordagem concreta e aplicada, que conecta os conceitos matemáticos em questão ao espaço físico que compartilhamos e suaviza os níveis de abstração inerentes à Geometria; o desenvolvimento do pensamento geométrico; ambientes favoráveis para o surgimento de questões de ordem histórica e filosófica, o que pode sustentar uma visão de ciência correspondente a real, em contraposição com o senso comum; e possibilidade de discussões acerca da ação docente, por meio de discussões, reflexões e elaborações de estratégias pedagógicas e didáticas que permitam o trabalho com a temática na educação básica.

No que diz respeito à compreensão da Geometria e da Matemática como um todo, estudar um conhecimento milenar aceito durante tanto tempo e que gerou conclusões que fugiram de suas premissas e verdades, colaborando com todo um campo científico enriquece a formação do professor e o municia para exercitar a sua função dentro das salas de aula sobre as noções construídas com relação à Ciência. No que diz Oliveira et. al. (2015), em que o professor tenha

> consciência do que pretende ensinar (planejamento da aula e conhecimento efetivo do que se pretende ensinar, do ponto de vista matemático e didático), possui uma estratégia didática coerente (em relação ao objeto matemático em foco), tem fluência em relação às tecnologias empregadas e emprega uma abordagem problematizadora (OLIVEIRA; GONÇALVES; MARQUETTI, 2015, p. 475)

A Geometria do Táxi nutre, naturalmente, relações claras com a realidade material ao permitir o reconhecimento de rotas, cálculos de distância, padrões de deslocamento e visualização de contextos espaciais. Segundo Silva et. al, essa Geometria tem “elementos que ajudam na compreensão de situações do cotidiano e, ao mesmo tempo, condições para auxiliar no desenvolvimento do pensamento geométrico e da habilidade visual.” (SILVA et. al, 2021, p.2). No contexto do ensino de Geometria, o professor deve estar apto a colaborar com o desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos. Segundo Costa (2020),

> O pensamento geométrico é capacidade mental de produzir conhecimentos em Geometria; de mobilizar, de forma coerente, os instrumentos geométricos[7] na resolução de problemas; é a capacidade de entender a complexidade dos fenômenos e de realizar inferência sobre eles; de reconhecer e verificar a relevância da Geometria como um instrumento para compreensão do mundo físico e como um modelo em Matemática para entendimento do mundo teórico (COSTA, 2020, p. 92).

A inserção da Geometria do Táxi na escola básica conta com a possibilidade de ligação com outros conteúdos e disciplinas, como por exemplo, o modelo de geografia urbana.

> [...] a Geometria do Táxi pode ser apresentada, com a intenção de se integrar a Matemática ao cotidiano do aluno, pois essa se apresenta em todos os lugares, não podendo, portanto, deixar de ser encontrada no espaço das “ruas”. Desta forma, confrontado com esta nova Geometria, o aluno pode ser levado a perceber que existem outras Geometrias além da Euclidiana, possibilitando que tenha despertada a sua curiosidade para novos ambientes matemáticos. (KALEFF; NASCIMENTO 2004, p. 13).

Além desses aspectos, os avanços relacionados ao desenvolvimento dos conhecimentos geométricos têm como palco o contexto social e cultural do período histórico em que se deram, assim como afirma Pavanello “Não há como negar as conexões entre o desenvolvimento material da sociedade e o da ciência” (PAVANELLO, 1993, p. 56).

O uso de *softwares* na investigação de uma nova Geometria contribui para a formação do professor que ensina Matemática de maneira que ele consiga explorar conjecturas acerca de

[7] Por instrumentos geométricos, o autor considera tanto os processos mentais utilizados para resolver problemas ou compreender um assunto em Geometria, bem as ferramentas tecnológicas, como régua, compasso, software de Geometria Dinâmica e outros, que são utilizadas nessas situações (COSTA, 2019, p. 118).

problemas específicos da Geometria do Táxi e das outras Geometrias não Euclidianas, investigá-los a ponto de testá-los na intenção de descobrir novos resultados ou até mesmo de comprovar os fatos que lhe são apresentados, testar alternativas que possam ofertar novos resultados, dentre outras possibilidades.

Considerações Finais

O presente artigo teve a intenção de discutir fatores históricos pertencentes ao desenvolvimento do conhecimento geométrico, em especial às métricas não euclidianas, e apresentar possibilidades para a inserção da Geometria do Táxi na formação de professores que ensinam Matemática, por meio do uso de *softwares*.

Desmistificar a ideia de que existe apenas uma maneira de representar o espaço (que rodeia o imaginário das pessoas) exige uma posição investigativa e um processo de instrumentalização que perpassa as limitações encontradas pelo modelo geométrico euclidiano. Ressaltamos a importância da produção histórico-social de conhecimentos milenares e seus desdobramentos na produção de outros conhecimentos, fato necessário se quisermos propor uma alfabetização científica com significado.

Convenhamos que é importantíssimo que professores que ensinam matemática conheçam, ou que pelo menos tenham um conhecimento básico, sobre a existência de outras Geometrias, chamadas de não Euclidianas, para além daquelas ditas Euclidianas. Conforme Leivas e Soares (2011) indagam sobre a "inserção no currículo de um conteúdo que ainda não está, na maioria das vezes, inserido na formação profissional de professores de Matemática, muitos dos quais ainda desconhecem a existência de triângulos não euclidianos, por exemplo" (LEIVAS; SOARES, 2011, p. 74-75).

Corroboramos que o uso das tecnologias, mais especificamente dos *softwares* de geometria dinâmica e de geolocalização, proporciona aos professores e futuros professores que ensinam Matemática experiências acerca de abordagens investigativas e exploratórias, ao analisar o mundo físico através de conceitos e conjecturas matemáticas que são muitas vezes ditos como abstratos demais, e discussões a respeito das possibilidades metodológicas e pedagógicas desse contexto.

Defendemos uma inserção das Geometrias não Euclidianas na formação inicial de professores que não demande a criação de novas disciplinas a serem acrescentadas ao currículo, mas que discuta, nos espaços formativos já existentes, os conhecimentos geométricos não euclidianos com o propósito de mobilizar o pensamento geométrico de professores e futuros professores que ensinam Matemática.

Enfatizamos que as sugestões apresentadas demandam seleções cuidadosas e metodologicamente estruturadas, a fim de tornar os conceitos em discussão acessíveis aos professores e futuros professores em formação. Isso leva em conta as barreiras conceituais e os padrões de pensamento previamente estabelecidos por eles.

Referências

ABREU, J. F.; BARROSO, L. C. **Geografia, modelos de análise espacial e GIS.** Belo Horizonte: PUC-Minas, 2003. 231 p.

BARROS, R. C. P.; PAVANELLO, R. M. Relações entre figuras geométricas planas e espaciais no ensino fundamental: o que diz a BNCC? **JIEEM**, v. 15, n. 1, p. 11-19, 2022.

BOYER, C.B. **História da Matemática.** Tradução de: Elza F. Gomide.1. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

COSTA, A. P. O PENSAMENTO GEOMÉTRICO EM FOCO: construindo uma definição. **Revista Eletrônica Cientí-fica Ensino Interdisciplinar**. v. 6, n. 16, 2020.

EUCLIDES. **Os Elementos.** Tradução e Introdução de: Irineu Bicudo. São Paulo: Ed. UNESP, 2009.

EVES, H. **Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula: geometria**. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992. 77 p.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 2. ed. revista. Campinas, SP: Autores Associados, 2007. (Coleção Formação de Professores).

GARBI, G. G. **A Rainha das Ciências:** um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática. 5. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

KALEFF, A.M.; NASCIMENTO, R.S. Atividades Introdutórias às Geometrias Não Euclidianas: o exemplo da Geometria do Táxi, In: Boletim Gepem. Rio de Janeiro. **Anais.** Rio de Janeiro: [s.n.], 2004.

LEIVAS, J. C.; SOARES, M. T. C. Triângulos Diferentes: Dos Planos aos Geodésicos. **Educ. Matem. Pesq**., São Paulo, v. 13, n. 1, p.77-93, 2011.

MENDES, I. A. A investigação histórica como agente da cognição matemática na sala de aula. In: MENDES, I A.; FOSSA, 1. A.; VALDÉS, J. E. N. **A História como um agente de cognição na Educação Matemática.** Porto Alegre, 2006.

OLIVEIRA, G. P.; GONÇALVES, M. D; MARQUETTI, C. Reflexões acerca da tecnologia e sua inserção na pesquisa em Educação Matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 17, n. 3, p. 472-489, 2015.

PAVANELLO, R. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetetiké.** Campinas, v. 1, v.1, p. 7-18, 1993.

ROQUE, T. **História da matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SILVA, E. C. R T.; BELLEMAIN, P. M. B.; GALVÃO, T. F. Para onde vai esse táxi? Uma revisão da literatura sobre a Geometria do Táxi no Brasil. **Revista Eletrônica de Educação Matemática.** Florianópolis, v. 16, p. 1-21, jan./dez. 2021.

SILVA, P. C. N.; FRANQUEIRA, A. B. R.; NASSER, L. Ensino de Geometria: uma experiência além do material didático. *In*: Encontro Nacional de Educação Matemática, 13, 2019. Cuiabá (MT). **Anais** [...] Cuiabá: SBEM, 2019.

VIEIRA, C. A. do Nascimento; BATISTA, E. B.; TAVARES, L. da Silva. Explorando conceitos de geometria não-euclidiana com softwares de geometria dinâmica. **Revista Eletrônica Paulista de Matemática**. Bauru, v. 18, p. 37-48, jul. 2020.

ZANELLA; I. A., FRANCO, V. S.; CANAVARRO, A. P. Apreensão de objetos geométricos com o geogebra: um estudo com futuros professores de matemática. **Revista Educação em Questão**, Natal, v. 56, n. 48, p. 57-86, abr./jun. 2018.