O USO DO *CUBE SOLVER* E DO CUBO MÁGICO NO ENSINO DE GRUPOS E SUBGRUPOS: UMA PROPOSTA DE ENSINO

Tuila Caroline Frantz
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Toledo
tuila_fcaroline@hotmail.com

Adriano Alfredo Schneider
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Toledo
adrianoalsc10@hotmail.com

Renato Francisco Merli
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Toledo
renatomerli@utfpr.edu.br

Robson Willians Vinciguerra
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Toledo
robsonw@utfpr.edu.br

Wilian Francisco de Araujo
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Toledo
waraujo@utfpr.edu.br

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo propor uma sequência de ensino de Álgebra para o ensino superior acerca da Teoria de Grupos por meio do Cubo de Rubik, ou, como é mais conhecido, Cubo Mágico, com o auxílio de um aplicativo para telefones celulares - o *Cube Solver*. Sabendo que podemos considerar o cubo com seus movimentos um grupo de permutações, o aplicativo aqui abordado, assim como diversos outros, utiliza um método de resolução computacional do cubo que serve de motivação para alunos que não tenham domínio total sobre a resolução do cubo, ajudando a utilizar o mesmo como ferramenta pedagógica. Assim, propomos uma abordagem introdutória da Teoria de Grupos utilizando o Cubo Mágico e o *Cube Solver*.

Palavras-chave: Álgebra. Ensino Superior. Método de Thistlethwaite.

Introdução

Os cursos de licenciatura em Matemática devem possuir, em suas disciplinas de cunho matemático, aspectos voltados para a discussão desses conteúdos do Ensino Superior relacionados com a Educação Básica (Jardim, Ribeiro, Aguiar, 2023). Uma dessas disciplinas é Álgebra, cuja perspectiva dos licenciandos é de uma disciplina "formal e inacessível" (Neves, Silva, Andrade, 2022).

Nesse contexto, a utilização de materiais manipuláveis, como o Cubo Mágico, e de ferramentas tecnológicas, como o *Cube Solver*, podem ajudar os acadêmicos na apropriação dos conceitos mais abstratos de teoria de grupos, abarcados na disciplina de Álgebra.

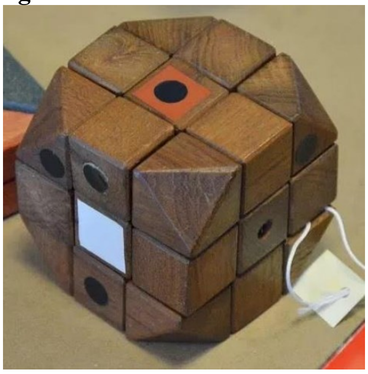
A partir disso, surgiu o Projeto do Cubo Mágico, no qual todos os autores do presente trabalho participam, desenvolvido na UTFPR-TD, com reuniões semanais de três horas de duração. O projeto tem como objetivos levar o cubo mágico para as escolas, ensinando os alunos a resolvê-lo, e também estudar a parte matemática por trás dos movimentos, combinações, permutações e tudo que possa envolver o cubo e a teoria de grupos por trás dele.

Assim, neste texto, propomos uma sequência de ensino para o Ensino Superior que utilize o Cubo Mágico e o aplicativo *Cube Solver*, no ensino dos conceitos relacionados à teoria de grupos, como grupo, subgrupos e grupo de permutações. Na primeira seção, apresentamos o Cubo Mágico. Na sequência, discorremos sobre as resoluções de um Cubo Mágico e o chamado Número de Deus. Em seguida, mostramos o *Cube Solver* e, por fim, explicamos nossa proposta de ensino.

Conhecendo o Cubo Mágico

O Cubo de Rubik (3x3x3), também conhecido como Cubo Mágico, traz esse nome em homenagem ao seu criador, o professor e arquiteto húngaro Erno Rubik. Rubik inventou o cubo no ano de 1974 com o objetivo de trabalhar geometria espacial com seus alunos (Araújo, 2016). Inicialmente, Rubik tentou prender as peças com elásticos, porém, logo percebeu que os mesmos arrebentavam quando ele tentava girar as peças. Assim, Rubik decidiu esculpir cada uma das peças de forma que, encaixadas todas juntas, elas sustentam a estrutura do cubo e, ainda, permitissem o giro de cada uma das faces individualmente. Para identificar as peças, Rubik colou adesivos coloridos nelas (Figura 1).

Figura 1 - Primeiro Cubo de Rubik

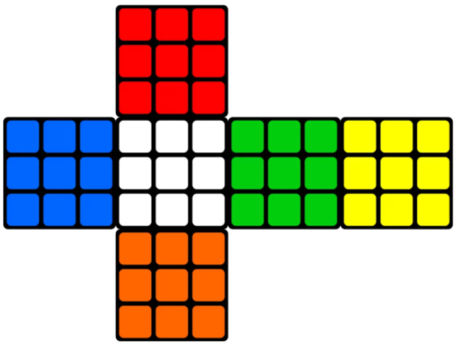


Fonte: Dijoli Senem

Desse modo, com o cubo pronto, o professor percebeu que, além da ferramenta de ensino que buscava, ele havia construído um quebra-cabeça que começaria a ser comercializado no ano de 1980, sendo rapidamente popularizado.

Atualmente, o Cubo de Rubik é amplamente conhecido como um cubo formado por 26 cubículos menores, sendo que cada uma das faces, quando o mesmo está montado, apresenta uma cor, são elas: azul, verde, vermelho, laranja, branco e amarelo (Figura 2).

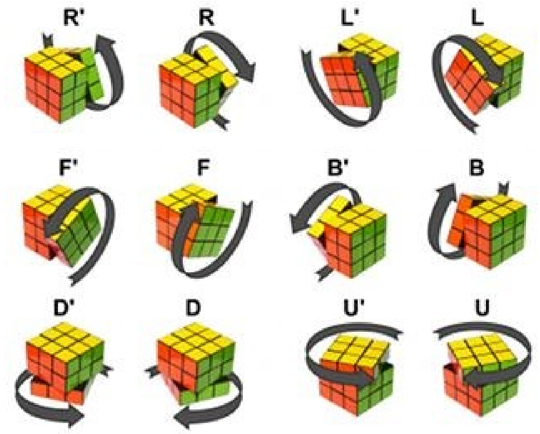
Figura 2 - Planificação do Cubo de Rubik



Fonte: *Oncube*

Existem vários algoritmos para resolver o Cubo de Rubik. Para repassá-los, surgiram notações sobre os movimentos que o cubo realiza. Pelo padrão mundial, toma-se a face branca para baixo e a face amarela para cima, então, tomando a face verde para frente, como mostrado na Figura 3, chama-se: *Front*, denotado F, o giro da face da frente no sentido horário; Inverso do *front*, denotado F^{-1}, o giro da face da frente no sentido anti-horário; *Right*, denotado R, o giro da face lateral direita no sentido horário; Inverso do *right*, denotado R^{-1}, o giro da face lateral direita no sentido anti-horário; *Left*, denotado L, o giro da face lateral esquerda no sentido horário; Inverso do *left*, denotado L^{-1}, o giro da face lateral esquerda no sentido anti-horário; *Down*, denotado D, o giro da face inferior no sentido horário; Inverso do *down*, denotado D^{-1}, o giro da face inferior no sentido anti-horário; *Back*, denotado B, o giro da face de trás no sentido horário; Inverso do *back*, denotado B^{-1}, o giro da face de trás no sentido anti-horário; *Up*, denotado U, o giro da face de cima no sentido horário; Inverso do *up*, denotado U^{-1}, o giro da face de cima no sentido anti-horário.

Figura 3 - Movimentos realizados no cubo mágico



Fonte: Afonso Cubo Mágico

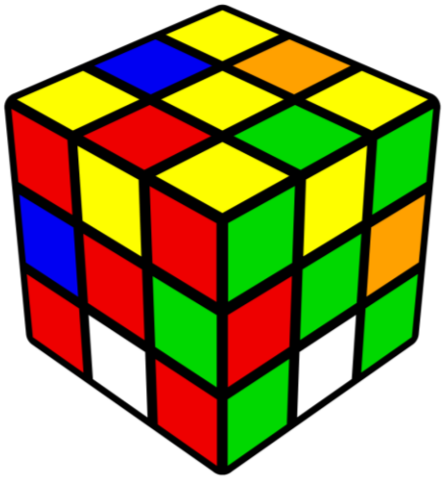
Apesar de vários métodos de resolução do Cubo de Rubik terem sido desenvolvidos, como o método das camadas e o método de Fridrich, que se baseiam em etapas para resolver o cubo sem perder o progresso do que já foi montado nas etapas anteriores, esses métodos demandam que muitos movimentos sejam aplicados no cubo até que ele seja, por fim, resolvido. Portanto, não demorou para os matemáticos começarem a buscar o menor número de movimentos que pudesse resolver qualquer posição do cubo e um algoritmo que resolvesse todos os cubos sem extrapolar esse número.

Método de resolução e o Número de Deus

Chamado de Número de Deus, o menor número de movimentos necessários para resolver qualquer arranjo do cubo já foi muito discutido por diversos pesquisadores. O início da busca por esse número começou desde muito próximo da criação do cubo, feita pela prova de limites superiores e inferiores.

Após muitas estimativas, no ano de 1995, Michael Reid provou que o número mínimo de movimentos seria 20 a partir de uma configuração denominada *Superflip* (Figura 4). Quanto ao limite superior, o primeiro matemático a propô-lo foi Morwen Thistlewaite, no ano de 1981. Este provou que 52 movimentos eram suficientes para resolver toda configuração possível do cubo. Contudo, foi no ano de 2012 que Tomas Rokicki, Herbert Kociemba, Morley Davidson e John Dethridge, com apoio da Google, provaram computacionalmente que 20 movimentos são suficientes para resolver qualquer configuração do cubo. Assim, com os limites inferior e superior coincidindo, foi provado que o Número de Deus é 20 (Araújo, 2016).

Figura 4 - Cubo em *Superflip*



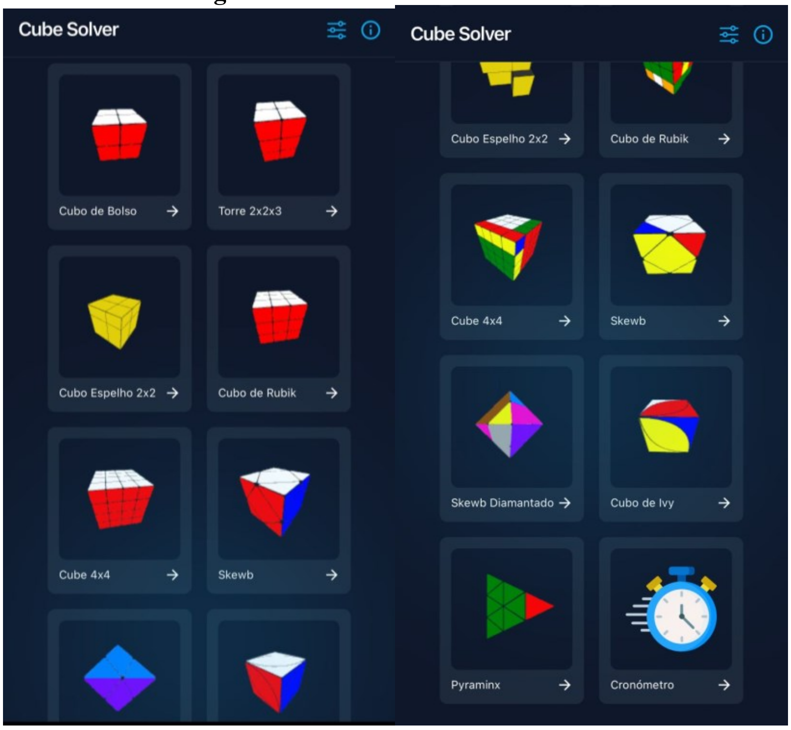
Fonte: Wikipedia

Apesar de o Número de Deus ter sido definido, ainda não há um único algoritmo que consiga encontrar uma sequência de movimentos que resolva qualquer configuração do cubo no menor número de movimentos possíveis. Há, contudo, alguns algoritmos que buscam se aproximar do menor número possível de movimentos, como o Método de Thistlethwaite e o utilizado pelo aplicativo *Cube Solver* que será abordado neste artigo.

Cube Solver

O *Cube Solver* (Figura 5) é um aplicativo para *smartphones* cuja função é resolver e ensinar como se soluciona o Cubo de Rubik (3x3x3). Ele também traz a ferramenta de resolução de outras versões do *puzzle*: Cubo de Bolso, Torre 2x2x3, Cubo Espelho 2x2, Cubo 4x4, *Skewb, Skewb* Diamantado, Cubo de Ivy e *Pyraminx*, porém, não traz a função de ensinar a resolvê-los sem a ajuda do aplicativo.

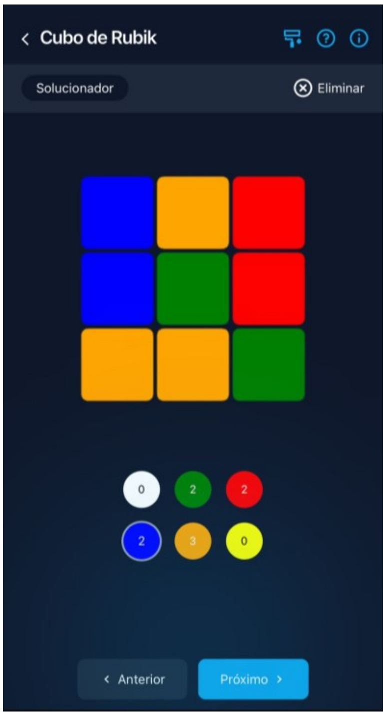
Figura 5 - Tela inicial do *Cube Solver*



Fonte: tela do aplicativo

Para utilizar a ferramenta de resolução (Figura 6) é simples: basta informar ao aplicativo a configuração do seu cubo, que ele informará uma sequência de movimentos para resolvê-lo.

Figura 6 - Ferramenta "resolver" *Cube Solver*



Fonte: Autor

Contudo, na ferramenta para aprender a resolver o cubo (Figura 7), o *Cube Solver* utiliza o método das camadas, que é o mais conhecido e simples.

Figura 7 - Ferramenta "aprender" do *Cube Solver*

Fonte: Autor

Mesmo para alguém que não conheça a resolução do método de camadas, o *Cube Solver* dá uma solução onde basta realizar os movimentos que são mostrados na tela. Isso é interessante para a nossa proposta de ensino, pois motiva os alunos que não conhecem a conseguirem montar o cubo, mesmo que com o auxílio do aplicativo, "sozinhos", trazendo o objeto para mais próximo da realidade do aluno.

Método de Thistlethwaite

O Método de Thistlethwaite se baseia na Teoria de Grupos da álgebra, cujo pior caso do cubo é resolvido com 52 movimentos. O método consiste em dividir a solução em quatro etapas, cada vez restringindo mais os movimentos, segundo os subgrupos a seguir:

G_0: permite todos os movimentos do cubo, assim, atinge-se uma configuração do cubo que pode ser resolvida com o próximo grupo, mais restrito.

G_1: permite somente os movimentos $R, R', L, L', B, B', F, F', D^2, U^2$. Do mesmo modo, com esses movimentos arranja-se o cubo de forma que possa ser resolvido com movimentos ainda mais restritos, o próximo subgrupo.

G_2: neste subgrupo, somente é possível executar os movimentos $R, R', L, L', B^2, F^2, D^2, U^2$. Assim, configura-se o cubo de modo que possa ser resolvido com os movimentos de G_3.

G_3: somente é possível executar os movimentos de meia volta em todas as faces, ou seja, $R^2, L^2, B^2, F^2, D^2, U^2$.

G_4: por fim, com os movimentos do grupo anterior, o cubo recairá neste subgrupo que contém somente um elemento: o elemento neutro, ou seja, o cubo resolvido (Cezario, Miura, 2021).

Por consistir em um método que opera de maneira diferente dos mais tradicionais, o método de Thistlethwaite não é utilizado por humanos, porém, é um algoritmo efetivo para computadores, por ter poucos movimentos para resolver o cubo.

Utilizando o *Cube Solver* para ensinar Teoria de Grupos

Buscando trazer uma motivação para o estudo da Teoria de Grupos, principalmente em uma possível introdução à disciplina de álgebra, trazemos uma proposta de ensino utilizando o Cubo de Rubik para trabalhar a Teoria de Grupos. Uma vez que podemos explorar as combinações e os movimentos do cubo, baseado na Teoria de Grupos, como um grupo. Dessa forma conseguimos utilizá-lo para explorar o tema de forma prática em sala de aula.

O primeiro passo para fazer a utilização do Cubo de Rubik para o estudo é os alunos já terem o domínio sobre ele, seus movimentos e tipos de peça. Caso essa não seja a realidade dos alunos, é possível e necessário fazer uma introdução sobre o assunto. Uma vez que isso foi garantido, podemos começar a contextualizar o cubo mágico nos conceitos da Teoria de Grupos.

Conforme descrevem Domingues e Iezzi (2003), para que um conjunto não vazio, junto de uma operação, seja um grupo, ele deve submeter-se aos axiomas da associatividade, existência do elemento neutro e existência de simétricos. A partir disso, solicitaremos que os estudantes tentem mostrar como a composição dos movimentos do cubo, que formam cada posição, atendam todas as propriedades de um grupo.

Para os alunos testarem a propriedade associativa do cubo, será solicitado para realizarem os seguintes três movimentos a partir da posição montada do cubo: $R\ U\ L$. Será então solicitado aos alunos testarem os movimentos separados da seguinte forma $(R\ U)\ L$ e $R\ (U\ L)$. Mudou algo na posição final?

Para um conjunto G com determinada operação $*$ ser associativo, deve ocorrer $(a * b) * c = a * (b * c)$, para quaisquer $a, b, c\ \in\ G$. Então, o cubo será associativo uma vez que, sejam quaisquer movimentos A, B, C que executarmos no cubo, $(AB)C = A(BC)$, ou seja, obteremos a mesma permutação do cubo ao final.

Quanto ao elemento neutro, deve existir $e \in G$ tal que $a * e = e\ \forall\ a \in G$. Apesar de poder parecer contraditório, o elemento neutro do cubo mágico é ele montado. Por estarmos acostumados a pensar em elementos neutros como 0 e 1, algo "completo" ou "cheio" pode não parecer o elemento neutro, mas, neste caso, será, uma vez que ele é o objetivo do cubo.

A ideia de ele ser o elemento neutro do cubo fica mais fácil de se visualizar quando pensamos que existem combinações do cubo embaralhado que não tem solução, e, portanto, não podem pertencer ao nosso grupo. Portanto, a maneira de listarmos todas as possíveis combinações do cubo, é embaralhar a partir dele montado, isso garante que seja possível de retornar a sua forma montada. Então, ao operarmos o cubo montado com um elemento do grupo, resultará no próprio elemento, já que a construção do elemento partiu do cubo montado.

Agora sobre a comutatividade dos elementos, se realizarmos, partindo do cubo montado, os movimentos $R\ U$ e ao realizarmos, a partir do cubo montado novamente, o movimento $U\ R$, teremos o mesmo resultado? É possível inverter a ordem dos movimentos e possuir sempre o mesmo resultado? A resposta para essa pergunta é não! Uma vez que isso não é possível, podemos concluir que nosso grupo não é comutativo.

Nesse momento, será solicitado aos alunos realizarem um movimento simples a partir do cubo montado, apenas um movimento, R por exemplo. Como conseguimos reverter esse movimento, voltado à posição inicial e montando o cubo novamente? E para uma junção de movimentos, como $R\ U^2$, quais movimentos são necessários serem realizados para voltar retornarmos ao cubo montado?

A resposta para essas duas perguntas são os elementos inversos. Para o primeiro caso basta realizar o movimento no sentido contrário: R'. Já para o segundo caso basta realizar os movimentos no sentido contrário, na ordem inversa: $U'^2\ R'$. É possível realizar operações inversas no cubo, então podemos pensar que para cada elemento estamos embaralhando o cubo para toda posição possível, começando a realizar os movimentos a partir do elemento neutro, e para resolvê-lo, basta realizar os movimentos do elemento inverso.

Formalizando, para que o conjunto G com a operação $*$ cumpra com o axioma dos elementos simétricos, deve ocorrer que $\forall\ a\ \in G, \exists\ a'\ \in\ G$ tal que $a * a' = e$. De fato, todos os movimentos do cubo possuem seu inverso. Partindo do cubo montado, ao aplicar RR', o resultado volta para o elemento neutro. O mesmo ocorre com $LL', FF', BB', DD', U'U'$. Se aplicarmos uma composição entre esses elementos, ela também possuirá inverso, basta aplicar os inversos dos movimentos começando pelo último executado, em seguida o inverso do penúltimo e assim por diante, até completar o inverso do primeiro. Por exemplo, $RFUD\ D'U'F'R'\ = e$, ou seja, $D'U'F'R'$ é o inverso de $RFUD$.

Portanto, como o cubo mágico com seus movimentos é um grupo. Os elementos desse grupo são as posições que o cubo pode assumir. Cada elemento é o conjunto de movimentos que o cubo precisa realizar para chegar naquela posição a partir do elemento neutro.

Sabendo disso, podemos começar a trabalhar com sequências de movimentos no cubo. A partir do cubo montado, pediremos para realizar uma sequência de movimentos para embaralhar o cubo:

$$B\ U'\ D\ F'\ L'\ F^2\ R\ L\ F'\ D'\ F'\ R'\ U\ L'\ F\ B'\ L\ D'\ B'\ L'\ D\ L\ F'U\ R\ D$$

Ao realizar os movimentos inversos dessa sequência, na ordem inversa, o cubo retornará ao seu estado neutro:

$$D'\ R'\ U'\ F\ L'\ D'\ L\ B\ D\ L'\ B\ F'\ L\ U'\ R\ F\ D\ F\ L'\ R'\ F'^2\ L\ F\ D'\ U\ B'$$

Porém, essa forma de resolução não é a mais prática, pois para usá-la, é necessário saber os movimentos utilizados para chegar em determinada posição, e para gerar um grupo de soluções seria necessário ter catalogado todas as posições.

Entretanto, uma vez definido o grupo do cubo mágico, podemos começar a trabalhar com os subgrupos existentes nele. Para isso podemos usar a divisão dos grupos do Método de Thistlethwaite, onde restringimos os movimentos, criando os subgrupos, limitando a nossa quantidade de combinações que o cubo pode assumir a cada subgrupo e facilitando na criação de novos métodos de resolução.

Isso só nos mostra a importância do estudo da matemática, em específico da teoria de grupos, onde conseguimos simplificar as coisas por meio da aplicação matemática em casos reais.

Considerações Finais

Trabalhar com a teoria de grupos, um conteúdo da matemática pura, mais especificamente da álgebra, não precisa ser algo difícil. Neste artigo mostramos que conseguimos aplicar a teoria de grupos no Cubo de Rubik e através dele trabalhar todas as propriedades de grupo que costumamos trabalhar na álgebra.

Conseguimos mostrar que o cubo mágico é um grupo, e, portanto, possui elemento neutro, o cubo resolvido, possui elemento inverso, é associativo e não é comutativo. Com a demonstração no cubo e a formalização posterior dos conceitos, conseguimos facilitar a participação do aluno e a possível compreensão dele.

Para trabalhos futuros, seria interessante encontrar um aplicativo que faça uso do Método de Thistlethwaite, para utilizar o aplicativo na prática de encontrar os subgrupos do método na resolução dada, e comprovar a facilidade de resolução que o método propõe.

É possível abordar muitos outros conteúdos matemáticos à temática do Cubo de Rubik, fazendo dele um material com potencial didático enorme e permitindo a facilidade de aprendizado cada vez maior ao se reutilizar em sala de aula para mais de um conteúdo, uma vez que a cada uso os alunos estariam mais adaptados ao cubo.

Referências

AFONSO. Movimentos Básicos. **Afonso Cubo Mágico**. Disponível em: https://afonsocubomagico.webnode.page/movimentos-basicos/. Acesso em: 08 ago. 2023.

ARAÚJO, M. G. **O uso do cubo mágico como estratégia de ensino de permutações e funções**. 2016. Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte. Rio Grande do Norte, 2016. Disponível em: http://memoria.ifrn.edu.br/handle/1044/837. Acesso em: 17 ago. 2023.

BEZERRA, J. S. **Tópicos em Teoria de Grupos: O Desafio do Cubo de Rubik**. 2016. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade do Mato Grosso do Sul. Campo Grande, 2016. Disponível em: https://repositorio.ufms.br/handle/123456789/2799. Acesso em: 17 ago. 2023.

CEZARIO, A. P.; MIURA, S. M. N. Visão Computacional e Microcontroladores: Aplicação na Resolução do Cubo de Rubik. **Revista de Engenharia e Tecnologia**, Santa Catarina, v. 13, n. 4, p. 238-249, dez. 2021. Disponível em: https://revistas.uepg.br/index.php/ret/article/view/19635. Acesso em: 17 ago. 2023.

COMO Resolver o Cubo Mágico Método Básico - Camadas. **Blog ONcube**. Disponível em: https://www.blog.oncube.com.br/tutoriais/tutorial-3x3x3/como-resolver-o-cubo-magico-metodo-basico-camadas-intro/. Acesso em: 08 ago. 2023.

DOMINGUES, H.; IEZZI, G. **Álgebra Moderna**. 4ª ed. São Paulo: Atual Editora, 2003.

JARDIM, V. B. F.; RIBEIRO, A. J.; AGUIAR, M. O uso de Tarefas de Aprendizagem Profissional para o ensino da estrutura algébrica de Grupos na Licenciatura em Matemática. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 16, n. 42, p. 1-21, 2023. Disponível em: https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/17932. Acesso em: 17 ago. 2023.

NEVES, R. S. P.; SILVA, J. M. P.; ANDRADE, L. C. C. Concepções de professores de matemática sobre álgebra: entendimentos para a prática formativa na Licenciatura em Matemática. **TANGRAM - Revista de Educação Matemática**, Dourados: Mato Grosso do Sul, v. 5, n. 2, p. 44–69, 2022. Disponível em: https://ojs.ufgd.edu.br/index.php/tangram/article/view/13667. Acesso em: 17 ago. 2023.

SENEM, D. **O Cubo Mágico e o Aprendizado na Física**. 2017. Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em física) - Universidade Estadual do Centro Oeste. Guarapuava, 2017. Disponível em: https://www2.unicentro.br/fisica/files/2017/12/TCC-Dijoli-versao-final.pdf?x63480&x63480. Acesso em: 17 ago. 2023.

SUPERFLIP. **Wikipedia.** Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/Superflip. Acesso em: 17 ago. 2023.