UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DA FORMA TRIGONOMÉTRICA DE NÚMEROS COMPLEXOS

Julio Cezar Rodrigues de Oliveira
Seed - Secretaria de Estado de Educação
julioeconomist@hotmail.com

Danilo Augusto Ferreira de Jesuz
Instituto Federal do Paraná - Campus Jaguariaíva
danilo.jesuz@ifpr.edu.br

Gilcimar da Cruz Leal
Instituto Federal do Paraná - Campus Paranaguá
gilcimar.leal@ifpr.edu.br

Resumo
O objetivo desse artigo é apresentar e discutir uma proposta de ensino da forma trigonométrica de números complexos, articulando os conhecimentos de conteúdo, pedagógicos e tecnológicos (TPACK) presentes nessa proposta. Esta pesquisa é de natureza qualitativa de cunho interpretativo e para a escrita dessa proposta foi considerado como contexto a construção de uma horta por alunos de um curso técnico integrado em alimentos, no qual o professor tem como objetivo a introdução de um conteúdo: a forma trigonométrica dos números complexos. A proposta foi dividida em três etapas e, em cada etapa, destacamos os conhecimentos de conteúdo, pedagógicos e tecnológicos evidenciados e como eles podem ser articulados. Ao compreenderem os princípios pedagógicos e os conteúdos específicos, os educadores podem ajustar o uso das tecnologias de maneira apropriada e adequada ao seu contexto educacional, levando em consideração os estilos de aprendizagem dos alunos e promovendo interações significativas.
Palavras-chave: TPACK. Conhecimentos tecnológicos. Formação de professores.

Introdução

A integração de tecnologias no ensino de matemática não é uma discussão recente, dado que a presença de ferramentas tecnológicas já se tornou uma parte essencial do cotidiano tanto de alunos quanto de professores em diversos âmbitos como, por exemplo, a utilização de aplicativos de celulares para desenhar polígonos ou resolver equações (BALDINI, 2014; OLIVEIRA; TORTOLA, 2013).

Nesse sentido, a utilização de recursos como softwares interativos (GeoGebra, por exemplo), vídeos, aplicativos educacionais e plataformas de aprendizado online tem proporcionado novas abordagens para o ensino e a aprendizagem da matemática, tornando o conteúdo mais acessível, envolvente e adaptado às necessidades individuais dos estudantes (JESUZ; PEREIRA, 2018). Essa sinergia entre tecnologia e educação reflete a realidade contemporânea e reforça a importância de explorar continuamente maneiras inovadoras de promover um aprendizado mais eficaz e significativo.

Nosso objetivo nesse trabalho é apresentar e discutir uma proposta de ensino da forma trigonométrica de números complexos, articulando os conhecimentos de conteúdo, pedagógicos e tecnológicos presentes na situação-problema apresentada.

A proposta apresentada e discutida nesse trabalho aborda o ensino da forma trigonométrica de números complexos a partir da ideia de construção de uma horta por alunos de um curso técnico integrado em alimentos. A partir de uma situação-problema inicial, os alunos são incentivados a utilizar as tecnologias comuns em sala de aula como lápis e caderno, aliadas a outras ferramentas, como o GeoGebra[1] e a retomada dos conteúdos por meio de vídeos do YouTube, em uma aula planejada de forma que o professor tenha condições de mediar os processos de ensino e de aprendizagem de modo a atingir os seus objetivos de ensino.

Nas próximas seções apresentamos a fundamentação teórica desse trabalho, os encaminhamentos metodológicos, a proposta de ensino com a discussão dos conhecimentos explorados e, por fim, as considerações finais.

O TPACK como alternativa para a articulação entre conhecimentos pedagógicos, tecnológicos e de conteúdo

A inserção e integração das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC) na educação têm sido discutida há décadas e hoje elas adentram no espaço educacional em todos os níveis de escolaridade (da Educação Infantil ao Ensino Superior), embora ainda existam professores que apresentam receio e dificuldades quanto ao seu uso em sala de aula, seja por não se sentirem preparados para lidar com essas ferramentas ou pelo fato desse uso implicar em uma mudança no cenário escolar, o que implica também em uma mudança nos papeis de alunos e professores (OLIVEIRA; TORTOLA, 2013).

Para Jesuz e Pereira (2018), tendo em conta o ensino de Matemática, a utilização de recursos tecnológicos, além de facilitar a compreensão e a aprendizagem, pode tornar significativa a aprendizagem de alguns conceitos de matemática. No entanto, a utilização da tecnologia pode representar uma barreira para os professores, uma vez que muitas vezes eles não se sentem preparados para lidar com essas ferramentas e com os conhecimentos relacionados a sua utilização. Essa

[1] GeoGebra é um aplicativo computacional livre de matemática dinâmica que combina conceitos de geometria e álgebra. Pode ser encontrado no link: https://www.geogebra.org/

dificuldade pode estar relacionada a constituição dos conhecimentos necessários para que um professor tenha condições de trabalhar com conteúdos de matemática levando em conta também os conhecimentos pedagógicos e tecnológicos associados nesse contexto.

Shulman (1986) considera que a formação de professores precisa levar em consideração o conhecimento de conteúdo e o conhecimento pedagógico. Na busca por interligar esses dois conhecimentos, o autor propôs o *PCK – pedagogical contente knowledge,* que significa conhecimento pedagógico de conteúdo, que representa a interação e a interseção entre o conhecimento de conteúdo e o conhecimento pedagógico.

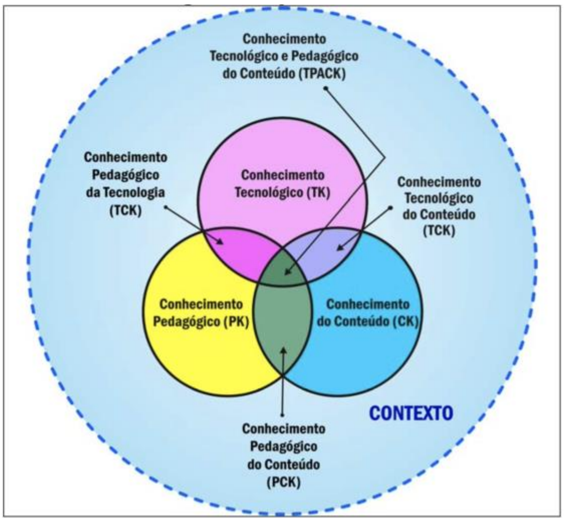
Baldini (2014, p. 37) situa que nas salas de aula, além desses conhecimentos, precisamos considerar que

> há uma variedade de tecnologias, tais como: livros didáticos, cadernos, lápis, giz, quadro, que ao longo do tempo se tornaram comum e não são, muitas vezes, percebidas como tecnologias. No entanto, ao usar as mais recentes, como os computadores que incorporam *hardware* e *software*, jogos educativos, internet, estas provocam mudanças na natureza da sala de aula ou têm potencial para fazê-lo.

Nesse sentido, a tecnologia e os conhecimentos associados a ela não podem ser considerados de forma separada em relação ao conhecimento de conteúdo e ao conhecimento pedagógico. Nesse sentido, Mishra e Koehler (2006) argumentam que os três conhecimentos precisam ser integrados, nomeadamente, o conhecimento de conteúdos, o conhecimento dos métodos pedagógicos e das tecnologias.

Para embasar seu argumento, Mishra e Koehler (2006) propõem uma estrutura conceitual e teórica para a utilização da tecnologia educacional no contexto da formação dos professores, o TPACK (*Technological Pedagogical Content Knowledge*) – Conhecimento Tecnológico Pedagógico de Conteúdo. Segundo Baldini (2014), o TPACK oferece possibilidades de discussões para a integração da tecnologia nos níveis teórico, pedagógico e metodológico.

Figura 01: TPACK



Fonte: Baldini (2014), adaptado de Mishra e Koehler (2006).

No quadro conceitual do TPACK (Figura 01), o conhecimento sobre conteúdo (*CK*), o conhecimento pedagógico (*PK*) e o conhecimento tecnológico (*TK*) são evidenciados para o desenvolvimento de um "bom ensino" (BALDINI, 2014; MISHRA; KOEHLER, 2006). Além disso, na proposta dos autores há três interseções desses três conhecimentos tomados dois a dois e uma interseção que considera os três conhecimentos[2], o que não impossibilita que cada um deles possa ser analisado isoladamente.

Com base em Baldini (2014), Mishra e Koehler (2006) e Shulman (1986, 1987), apresentamos no Quadro 01 uma breve caraterização para cada tipo de conhecimento apresentado no TPACK:

Quadro 01

Conhecimentos	Caracterização
Conhecimento de conteúdo (*CK*)	Conhecimento que os professores precisam ter a respeito do assunto real, objeto de ensino e aprendizagem.
Conhecimento pedagógico (*PK*)	Conhecimento sobre os processos de aprendizagem e práticas de ensino. Abordam também aspectos como valores, objetivos e estratégias para avaliar a compreensão dos alunos.
Conhecimento pedagógico de conteúdo (*PCK*)	É uma forma característica de conhecimento de conteúdo incorporado aos aspectos mais apropriados para o seu ensino. Inclui conhecer como um conteúdo pode ser organizado e planejado para um ensino que crie melhores condições para os alunos compreendam.
Conhecimento tecnológico (*TK*)	Conhecimento que remete a tecnologias que são ou podem ser utilizadas em ambientes de aprendizagem, incluindo habilidades necessárias para operar tecnologias específicas.
Conhecimento tecnológico de conteúdo (*TCK*)	Conhecimento que se refere à forma como a tecnologia pode ser usada para fornecer novas maneiras de ensinar um conteúdo. Além de conhecer o conteúdo, o professor precisa conhecer os tipos de representações e a maneira pela qual o conteúdo pode ser modificado em função do recurso tecnológico.

[2] A compreensão das interseções e interações entre os três conhecimentos (de conteúdo, pedagógico e tecnológico) no quadro conceitual do TPACK pode ser comparada a um diagrama de Venn e as interseções entre três conjuntos nesse diagrama.

Conhecimento pedagógico da tecnologia (*TPK*)	Conhecimento das possibilidades e limitações da tecnologia como colaboradora de diferentes abordagens de ensino, e, ainda, saber como o ensino e a aprendizagem podem mudar devido ao uso de tecnologias específicas e com o uso de uma estratégia pedagógica específica.
Conhecimento tecnológico e pedagógico de conteúdo (*TPACK*)	Conhecimento que envolve a compreensão das inter-relações entre *CK*, *PK* e *TK* ao usar a tecnologia para ensinar e aprender, incluindo a complexidade das relações entre alunos, professores, conteúdos, práticas e tecnologias. Requer uma compreensão da representação de conceitos utilizando tecnologias, de técnicas pedagógicas que usam tecnologias de maneira construtiva para ensinar um conteúdo, do conhecimento daquilo que torna os conceitos difíceis ou acessíveis, e de como a tecnologia pode ajudar a corrigir alguns dos problemas que os estudantes enfrentam na aprendizagem.

Fonte: Adaptado de BALDINI (2014), JESUZ; GABRIEL; PEREIRA (2018), MISHRA; KOEHLER (2006) e SHULMAN (1986, 1987).

O quadro conceitual do TPACK fornece uma maneira de dimensionar o conhecimento prospectivo que os professores em formação precisam, com o intuito de integrar a tecnologia em práticas de ensino. Nessa perspectiva, o ensino com o uso de tecnologias deve encontrar-se no cruzamento dos conhecimentos tecnológico, pedagógico e de conteúdo (BALDINI, 2014). Para a autora, "ensinar e aprender com tecnologias exige um relacionamento dinâmico entre esses conhecimentos (p. 42)", uma vez que a escolha de uma tecnologia impulsiona os tipos de decisões que são tomadas a respeito dos conhecimentos de conteúdo e pedagógicos que serão envolvidos em uma aula.

Por um lado, Bowers e Stephens (2011) consideram que o TPACK possibilita que a tecnologia seja utilizada para explorar relações matemáticas e não para repetir práticas utilizando tecnologias diferentes, ou seja, os autores argumentam que é possível fazer explorações genuinamente matemáticas para que os alunos tenham condições de fazer conjecturas e investigá-las a partir do uso de ferramentas tecnológicas. Por outro lado, os autores salientam que o TPACK pode colaborar com o desenvolvimento profissional dos professores, uma vez que eles têm a possibilidade de apropriar-se de hábitos tecnológicos, como quando buscam descrever a Matemática e as relações existentes que estão por trás de resultados que são mostrados na tela de um computador ou celular, por exemplo.

Além disso, a abordagem do currículo de Matemática da educação básica tem uma oportunidade de ser revigorada e aprimorada, e a incorporação estratégica de ferramentas tecnológicas pode representar uma alternativa. Ao explorar recursos digitais disponíveis, como por exemplo os *softwares* de geometria dinâmica como o GeoGebra, os professores podem repensar e reestruturar a maneira como os conteúdos matemáticos são ensinados.

As tecnologias oferecem simulações interativas, visualizações dinâmicas e ambientes de resolução de problemas que podem tornar os conceitos abstratos mais tangíveis e envolventes para os alunos. Dessa forma, as ferramentas tecnológicas não apenas enriquecem os processos de ensino e de aprendizagem, mas também podem incentivar uma abordagem colaborativa e exploratória, preparando os alunos para enfrentar os desafios matemáticos do mundo moderno de maneira mais criativa, confiante e competente.

Nessa perspectiva, Baldini (2014) afirma que a reorganização do currículo a partir das possibilidades que as tecnologias digitais oferecem e a avaliação das potencialidades de uma tecnologia para o ensino de conteúdos específicos de matemática, associados à uma metodologia condizente representam aspectos da formação que oportunizam a integração TDIC no âmbito educacional.

Encaminhamentos metodológicos

Esse trabalho é de natureza qualitativa, de cunho interpretativo, e tem como objetivo apresentar e discutir uma proposta de ensino da forma trigonométrica de números complexos, articulando os conhecimentos de conteúdo, pedagógicos e tecnológicos.

Para a elaboração dessa proposta, consideramos o contexto de um curso técnico integrado em alimentos, e tomamos como problemática inicial a construção de uma horta. A partir dessa situação, elaboramos uma proposta de ensino buscando identificar e articular conhecimentos de conteúdo com conhecimentos pedagógicos e conhecimentos tecnológicos.

As análises são realizadas à luz dos conhecimentos do quadro conceitual do TPACK - Conhecimento tecnológico e pedagógico de conteúdo (MISHRA; KOEHLER, 2006), por meio do qual buscamos destacar os conhecimentos que estão presentes nessa proposta e que articulações são realizadas entre eles. Apresentamos na sequência a proposta de ensino e as análises no final de cada etapa.

A construção de uma horta e como podemos identificar a localização de suas hastes

Apresentamos a seguir uma proposta para o ensino da forma trigonométrica de números complexos a partir do problema da construção de uma horta. Dividimos a proposta nas três etapas a seguir:

1) Qual é o formato ideal para a horta?
2) O que é a forma trigonométrica de um número complexo?
3) Como utilizar a forma trigonométrica de um número complexo para determinar a localização exata das hastes da horta?

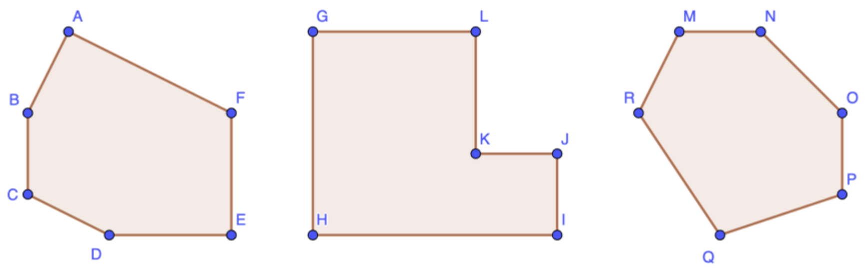
Em cada uma dessas etapas, vamos destacar os conhecimentos relacionados (de conteúdo, tecnológicos e pedagógicos) e como eles podem ser articulados nessa proposta.

Etapa 1: qual é o formato ideal para a horta?

Os alunos do curso Técnico Integrado em Alimentos embarcaram em um projeto de extensão: a elaboração da planta baixa de uma horta para aproveitar os produtos frescos em suas refeições no Campus. Para estabelecer um cercado eficiente, eles possuem uma quantidade limitada de tela e seis hastes maciças circulares para sustentação. Nessas condições, qual deve ser o formato da horta com o objetivo de maximizar a área de cultivo?

Para discutir essa questão, os alunos podem investigar a construção de diferentes hexágonos utilizando o GeoGebra e verificar as possíveis áreas que eles encontram, para que possam concluir qual deve ser o formato da horta, considerando que eles possuem seis hastes que representarão os vértices do hexágono que definirá o formato da horta, assim como apresentamos na Figura 02.

Figura 02: Possíveis hexágonos construídos pelos alunos.



Fonte: dos autores (2023).

Ao conduzir a investigação dos possíveis formatos para a horta, o professor deve também chamar a atenção para que os alunos busquem comparar os hexágonos considerando que eles devem ter o mesmo perímetro, uma vez que a quantidade de tela que eles têm para cercar a horta também é limitada. Dessa forma, o problema inicial resume-se a determinar qual deve ser o hexágono de maior área com um perímetro fixo para que seja possível otimizar a área de cultivo dessa horta.

Nessa investigação inicial, espera-se que professor e alunos cheguem à conclusão de que o hexágono regular será aquele que melhor representa a situação, uma vez que ele apresentará a maior área de cultivo com um perímetro fixo.

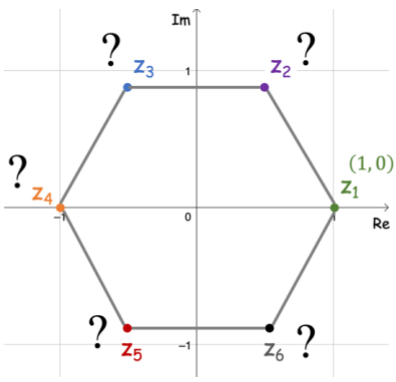
Na etapa 1 dessa proposta, o planejamento do professor envolve a articulação entre os três conhecimentos (pedagógico, de conteúdo e tecnológico). Ao utilizar o GeoGebra para investigar possíveis áreas para um hexágono, os alunos têm a oportunidade de conjecturar qual pode ser o formato ideal para a horta, o que envolve os conhecimentos de conteúdo relacionados a essa investigação. Além disso, o modo como o professor propõe essa investigação representa o conhecimento pedagógico, uma vez que está relacionado a que estratégia metodológica ele acredita ser potencial para que os alunos tenham condições de aprender e fazer essas conjecturas. Por fim, ao utilizar o GeoGebra para fazer essa investigação, os alunos podem fazer escolhas dentre as diversas ferramentas presentes nesse software como, por exemplo, eles podem usar a ferramenta polígono para construir o hexágono regular e depois calcular a área usando a ferramenta área, ou podem recorrer a ferramentas mais específicas, como por exemplo a ferramenta de polígono regular, uma vez que eles notarem que polígonos regulares representam áreas com valores maiores.

Etapa 2: o que é a forma trigonométrica de um número complexo

Sabendo que um hexágono regular contém a maior área possível, os alunos são desafiados a descobrir o local exato para as hastes a fim de maximizar a área de cultivo da horta. Para isso o professor propõe o seguinte questionamento: qual deve ser a localização de cada uma dessas hastes na planta baixa do projeto da horta dos alunos?

Como o objetivo dessa aula é a introdução do estudo da forma trigonométrica dos números complexos, e tendo em conta que os alunos já estudaram a forma algébrica[3] dos números complexos e a trigonometria no ciclo, o professor sugere que os alunos representem essa situação usando o plano de Argand-Gauss, tomando como ponto de partida o número complexo z_1, conforme representação na Figura 03.

Figura 03: Representação dos vértices do hexágono regular no plano de Argand-Gaus



Fonte: dos autores (2023).

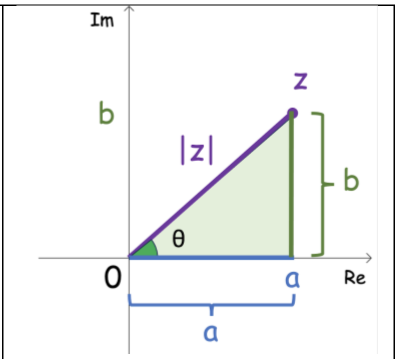
[3] Uma retomada sobre o que é a forma algébrica de um número complexo pode ser encontrada no link: https://www.youtube.com/watch?v=1ub20582N7A&list=PLbZ9_ijne4rmvU0EjaEVC3DDwzUiyGfLH&index=1 .

Notamos que o ponto z_1 no plano da Figura 03 é representado pelas coordenadas (1, 0), de modo que 1 representa a parte real e 0 representa a parte imaginária de z_1. Notamos também que o módulo de z_1 é igual a 1. A partir dessa representação no plano de Argand-Gauss, o professor vai questionar aos alunos quais devem ser as coordenadas dos outros vértices do hexágono regular. Para investigar a localização de cada um desses vértices, o professor vai introduzir o estudo da forma trigonométrica (ou forma polar) de um número complexo, que é dada por:

$$\mathbf{z = |\, z\, |.[cos(\theta) + i.sen(\theta)]}$$

Na forma trigonométrica de um número complexo, **| z |** representa o módulo do número complexo e **θ** é o argumento do número complexo. No contexto do problema, temos que $\mathbf{z_i}$ é o número complexo correspondente às coordenadas do vértice desejado, e **i** varia de 1 a 6.

Nesse momento da aula, o professor pode deduzir a forma trigonométrica[4] partindo da forma algébrica de um número complexo, na qual temos que **z = a + b.i**, e sua representação geométrica no plano de Argand-Gauss.

Primeiro passo: utilizar razões trigonométricas (seno e cosseno) no triângulo retângulo e no ciclo trigonométrico para escrever os parâmetros *a* e *b* do número complexo z em função do módulo e do argumento (ângulo).	$z = a + bi$ $\lvert z\rvert \cdot \cos(\theta) = \frac{a}{\cancel{\lvert z\rvert}} \cdot \cancel{\lvert z\rvert}$ $\boxed{\lvert z\rvert \cdot \cos(\theta) = a}$ $\lvert z\rvert \cdot sen(\theta) = \frac{b}{\cancel{\lvert z\rvert}} \cdot \cancel{\lvert z\rvert}$ $\boxed{\lvert z\rvert \cdot sen(\theta) = b}$	
Segundo passo: substituir esses parâmetros na forma algébrica do número complexo z.	$z = a + bi$ $z = \lvert z\rvert \cdot \cos(\theta) + \lvert z\rvert \cdot sen(\theta) \cdot i$ $z = \lvert z\rvert \cdot [\cos(\theta) + i \cdot sen(\theta)]$	
Terceiro passo: relacionar as duas formas (algébrica e trigonométrica), ressaltando qual parâmetros compõem cada uma delas.	$\boxed{z = a + bi} \Longrightarrow$ Forma algébrica $\boxed{z = \lvert z\rvert \cdot [\cos(\theta) + i \cdot sen(\theta)]}$ $\Downarrow$ Forma Trigonométrica	

Nessa etapa, as tecnologias usadas são apresentadas pelo professor, pois ele pode recorrer apenas ao quadro e ao giz, mas também pode fazer a utilização de uma apresentação em um projetor

[4] A dedução da forma trigonométrica de um número complexo pode ser encontrada no vídeo do link: https://www.youtube.com/watch?v=x66COeU_Tw4&list=PLbZ9_ijne4rmvU0EjaEVC3DDwzUiyGfLH&index=4 .

multimídia desses conceitos. No entanto, o foco está no conhecimento de conteúdo e como o professor introduz esse conhecimento em sua aula, o que engloba o conhecimento pedagógico de conteúdo, que envolve a forma pela qual o conteúdo será trabalhado com os alunos. Essa abordagem pode ser feita de maneira expositiva dialogada com os alunos, ou o professor pode fazer uso do recurso de um vídeo (ver nota de rodapé) para que os alunos o assistam e depois busquem explicar o conteúdo a partir de suas compreensões do vídeo, o que pode ser relacionado a estratégia metodológica da sala de aula invertida (BERGMANN, 2016).

Etapa 3: como utilizar a forma trigonométrica de um número complexo para determinar a localização exata das hastes da horta?

Nesse momento da aula, retomamos o problema da horta e o professor pode propor o seguinte questionamento: “Mas como a forma trigonométrica de um número complexo vai nos ajudar a resolver o problema?”

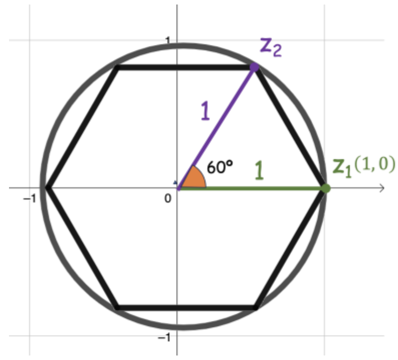
A partir da forma trigonométrica de cada um dos números complexos que determinam os vértices do hexágono regular, é possível reescrever o número complexo na forma algébrica que, por sua vez, nos indica o valor de cada uma das coordenadas do ponto que representa o número complexo no plano de Argand-Gauss. Essas serão as coordenadas dos vértices do hexágono regular. Na sequência o professor deve escrever z_1 na forma trigonométrica para que os alunos compreendam como esse processo pode ser feito quando conhecemos o número na forma algébrica.

$$\begin{aligned}
z_1 &= |z_1| \cdot [\cos(0°) + i \cdot sen(0°)] \\
z_1 &= 1 \cdot [1 + i \cdot 0] \\
z_1 &= 1 \cdot [1 + 0] \\
z_1 &= 1 \cdot 1 \\
z_1 &= 1
\end{aligned}$$

No caso de z_1, o ângulo formado entre o módulo de z_1 e o eixo real é de 0º, e por esse motivo calculamos **cos 0º** e **sen 0º** e o módulo de z_1 é igual a 1. E como $z_1 = 1$, a sua parte real é igual a 1 e a parte imaginária é igual a zero, logo $z_1 = (1, 0)$, assim como podemos observar na Figura 03.

Na sequência, o trabalho dos alunos se concentra em determinar as coordenadas de z_2, z_3, z_4, z_5 e z_6. Depois de calcular z_1, vamos analisar o caso do segundo vértice, que é representado por z_2. Nesse caso vamos justificar o comprimento do módulo de z_2 ao relembrar que o hexágono regular está inscrito em uma circunferência de raio 1 (Figura 04), portanto o módulo de z_2 é igual a 1 também, e a mesma situação vai repetir-se para os módulos dos outros vértices do hexágono regular.

Figura 04: Hexágono regular inscrito na circunferência de raio 1



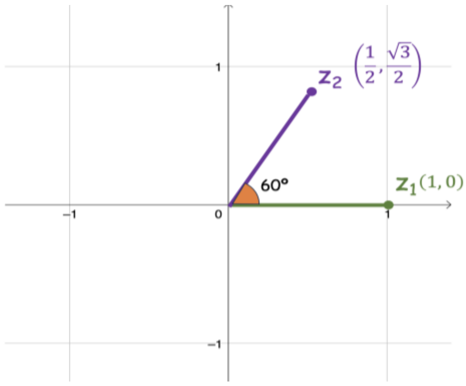
Fonte: dos autores (2023).

Com relação ao argumento (ângulo), a medida é de 60º, pois 360º/6 = 60º. Desse modo temos que **z_2 = cos(60°) + i.sen(60°)**, e a partir dessa representação podemos reescrever z_2 na forma algébrica.

$$z_2 = |z_2| \cdot [\cos(60°) + i \cdot \text{sen}(60°)]$$
$$z_2 = 1 \cdot \left[\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$
$$z_2 = \frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Dessa forma, podemos identificar z_2 no ponto: $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Figura 05: Representação de z_2 no plano de Argand-Gaus



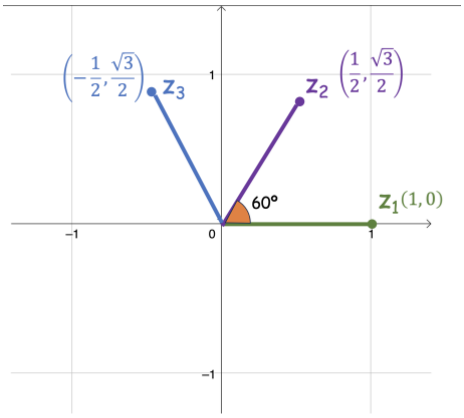
Fonte: dos autores (2023)

Na sequência, vamos encontrar o terceiro ponto no plano de Argand-Gauss, representado pelo número complexo z_3, com argumento igual a 120º, ou seja, θ = 120º, e módulo | z | = 1. Portanto, a forma trigonométrica é: **z_3 = cos(120°) + i.sen(120°)**, e assim temos:

$$z_3 = |z_3| \cdot [\cos(120°) + i \cdot \text{sen}(120°)]$$
$$z_3 = 1 \cdot \left[-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$
$$z_3 = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Dessa forma, podemos identificar z_3 no ponto: $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

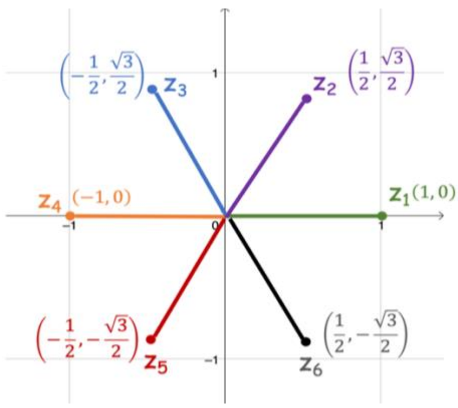
Figura 06: Representação de z_3 no plano de Argand-Gauss



Fonte: dos autores (2023)

De forma análoga, podemos encontrar os outros três pontos z_4, z_5 e z_6. Portanto, professor pode propor que os alunos determinem as coordenadas desses três pontos.

Figura 07: Localização de todas os vértices do hexágono regular no plano de Argand-Gauss



Fonte: dos autores (2023)

Na sequência, o professor pode apresentar essas coordenadas de z_4, z_5 e z_6 e questionar os alunos: vocês observaram algum padrão ao determinar esses pontos e suas coordenadas?

Nesse ponto, espera-se que os alunos observem algumas simetrias que podemos determinar ao identificar todos os vértices:

- Simetria entre z_1 e z_4, em relação ao eixo das ordenadas ou o ponto (0,0).

- Simetria entre os pontos z_2 e z_3 em relação ao eixo das ordenadas (o que também ocorre com z_5 e z_6).

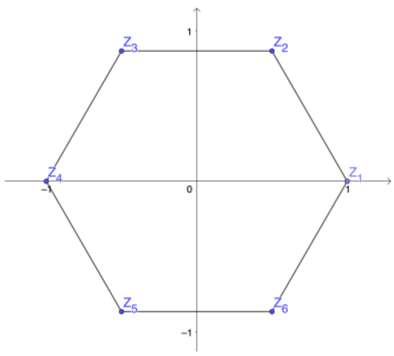
- Simetria entre os pontos z_2 e z_6 em relação ao eixo das abscissas (o que também ocorre com z_3 e z_5). Nesse caso, temos os conjugados dos números considerados.

Portanto, foram determinadas as coordenadas dos seis pontos que representam a localização de cada uma das seis hastes da horta.

$$z_1 = (1, 0) \qquad z_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad z_3 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad z_4 = (-1, 0) \qquad z_5 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad z_6 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Uma vez que a localização dos seis vértices do hexágono regular é determinada é possível plotar esses pontos no plano de Argand-Gauss com o auxílio do GeoGebra, para que os alunos possam verificar que todas as coordenadas de fato representam os vértices de um hexágono regular de raio 1 que está inscrito em uma circunferência com centro no ponto (0,0).

Figura 08: Vértices do hexágono regular no GeoGebra



Fonte: dos autores (2023).

Desse modo, é possível empregar a forma trigonométrica dos números complexos, partindo do módulo de cada número e do seu argumento, para reescrevê-lo na forma algébrica e determinar as suas coordenadas no plano de Argand-Gaus. Por fim, temos condições de resolver o problema da localização dos vértices de um hexágono regular que representa a planta de uma horta com maior área possível.

Nessa proposta, consideramos como módulo dos números complexos (e como raio do hexágono regular inscrito em uma circunferência) a medida de 1 unidade para facilitar a compreensão do problema, mas poderíamos ter adotado uma medida genérica, como **r** por exemplo, para poder então generalizar essa situação para uma medida de um módulo (ou raio) qualquer. Uma possível continuidade para esse trabalho seria a elaboração dessa mesma planta no terreno onde será construída essa horta, para que os alunos possam fazer essa análise dessas medidas e como elas serão utilizadas no terreno real.

Além disso, a partir dessa situação inicial, outros problemas podem ser explorados pelo professor. Por exemplo, podemos utilizar o GeoGebra para explorar qual será a área desse terreno e como essa área poderá ser aproveitada para maximizar o cultivo dessa horta.

Ao desenvolver a Etapa 3 dessa proposta podemos relacionar os três conhecimentos (de conteúdo, pedagógico e tecnológico). O conhecimento de conteúdo e a forma como ele é trabalhado podem ser considerados quando o professor articula de que modo a forma trigonométrica possibilita que cada um dos números complexos sejam reescritos na forma algébrica para que, em seguida, sejam escritos como coordenadas e permitam que assim seja possível identificar a localização de cada um deles no plano de Argand-Gauss e, consequentemente, possibilitem que os alunos compreendam a localização dos pontos que representam os vértices de um hexágono regular que identificarão a localização das hastes da horta. Nesse sentido, a transição da forma trigonométrica para a forma algébrica de um número complexo traz um significado no contexto do problema da horta, porque é a partir dessa transição que os alunos identificam a localização das hastes da horta.

Além disso, conforme eles determinam a localização de cada um desses vértices, espera-se que eles observem as simetrias que obtemos no plano e, por meio dos questionamentos do professor (conhecimento pedagógico do conteúdo), os alunos relacionam esse conteúdo a outros conteúdos estudados anteriormente como, por exemplo, o conjugado de um número complexo e a simetria entre um número complexo e o seu conjugado no plano de Argand-Gauss.

Considerações Finais

Nesse estudo, apresentamos uma proposta para o ensino da forma trigonométrica de um número complexo, por meio de uma aplicação voltada para a resolução de um problema da construção de uma horta e da identificação do local onde devemos colocar as seis hastes que representam os vértices de um hexágono regular que determinam o formato dessa horta. Além disso, identificamos e articulamos conhecimentos de conteúdo, pedagógicos e tecnológicos que estão implícitos no trabalho com essa proposta, destacando formas de abordagem para as etapas do desenvolvimento dessa proposta.

É inegável a importância do desenvolvimento de habilidades dos professores que envolvem a articulação entre conhecimentos pedagógicos, de conteúdo e tecnológicos, já que essa integração resulta em uma abordagem educativa que busca otimizar as condições para que os alunos aprendam.

Ao compreenderem os princípios pedagógicos, os educadores podem ajustar o uso das tecnologias de maneira apropriada e adequada ao seu contexto educacional, levando em consideração os estilos de aprendizagem dos alunos e promovendo interações significativas.

Ademais, possuir o domínio do conteúdo permite aos professores identificar as abordagens que podem ser mais eficazes para serem utilizadas também com ferramentas tecnológicas, e assim esclarecer conceitos complexos, bem como instigar o interesse dos estudantes. A convergência desses três conhecimentos (de conteúdo, pedagógico e tecnológico) também capacita os educadores a enfrentar os desafios em constante evolução da educação contemporânea, habilitando-os a inovar, colaborar e preparar os alunos para um mundo cada vez mais digital e globalizado.

Referências

BALDINI, L. A. F. **Elementos de uma Comunidade de Prática que permitem o desenvolvimento profissional de professores e futuros professores de Matemática na utilização do Software GeoGebra.** 2014. 219 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

BERGMANN, Jonathan; SAMS, Aaron. **Sala de aula invertida**: Uma metodologia ativa de aprendizagem. Trad. Afonso Celso da Cunha Serra. 1. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

BOWERS J. S.; STEPHENS, B. Using technology to explore mathematical relationships: a framework for orientating mathematics courses for prospective teachers. **J. Math Teacher Educ.** 2011. p. 285-304.

JESUZ, D. A. F. de PEREIRA, A. L. Estratégias para ensino de áreas de regiões planas irregulares na educação básica: uma proposta fundamentada no uso do software GeoGebra. **Educitec**. Manaus, v.4, n.8, p. 40-58, nov. 2018. Edição especial.

JESUZ, D. A. F. de. GABRIEL, F. A. PEREIRA, A. L. Tecnologias Digitais como Conhecimentos necessários à formação inicial docente: aspectos a considerar. In: **III Simpósio Internacional sobre Desenvolvimento Profissional Docente**. Curitiba, 2018.

MISHRA, P. KOEHLER, M. J. Technological pedagogical content knowledge: a framework for teacher knowledge. **Teachers College Record**, v.108, n.6, p. 1017-1054, jun. 2006.

SHULMAN, L. Those Who Understand: knowledge growth in teaching. **Educational Research**. Washington, v. 12, n. 2, p. 4-14, 1986.

SHULMAN, L. Knowledge and Teaching: foundations of the new reform. **Harvard Educational Review**. v. 51, n. 1, p. 1-22, fev. 1987.

OLIVEIRA, J. C. R. de ; TORTOLA E. O Ensino de Pontos Notáveis por meio do GeoGebra: uma discussão em um curso de formação continuada. **VII CIBEM**, Montevidéu, 2013.