A Representação na Análise de Modelos apoiada por Tecnologias Digitais

Nabila Iasbik Giroti
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
nabilaiasbik@alunos.utfpr.edu.br

Adriana Helena Borssoi
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
adrianaborssoi@utfpr.edu.br

Eduardo Cesar Tonin
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Eduardotonin@alunos.utfpr.edu.br

Emerson Alves Rosa
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
emersonalvesrosa@alunos.utfpr.edu.br

Resumo

Neste artigo, compartilhamos os resultados preliminares de uma pesquisa de mestrado em andamento, cujo foco está na exploração do ensino e aprendizado de Equações Diferenciais Ordinárias em uma turma de Engenharia Mecânica. Utilizando a Análise de Conteúdo como metodologia, nosso estudo visa discutir a compreensão de modelos clássicos nesse campo. O objetivo central da atividade foi analisar o modelo que rege o movimento de um pêndulo simples através da perspectiva da Análise de Modelos, destacando a evidências do Pensamento Matemático Avançado por parte dos estudantes, em especial os processos de Representação. Iniciamos com uma situação-problema que instigou os alunos a abordarem diversos tópicos relacionados à Análise de Modelos. Esses tópicos foram explorados com base em simulações prévias, apoiadas por tecnologias digitais. O foco principal reside na investigação do processo de Representação adotado pelos alunos ao analisar o modelo clássico do pêndulo simples, utilizando ferramentas tecnológicas como o Tracker e o Geogebra. Os resultados dessa análise destacam potencialidades proporcionadas pelo uso dessas tecnologias digitais no contexto educacional, ressaltando suas contribuições para a compreensão aprofundada dos conceitos matemáticos em questão.

Palavras-chave: Análise de Modelos. Pensamento Matemático Avançado. Equações Diferenciais Ordinárias.

Introdução

Sob uma perspectiva teórica, é amplamente reconhecido por meio de inúmeras pesquisas que o ensino e a aprendizagem da Matemática desempenham um papel fundamental em todas as fases da educação. Esse reconhecimento impulsiona a busca constante por aprimorar o processo educacional, especialmente no contexto das Equações Diferenciais. A evolução tecnológica intensificou ainda mais a importância de direcionar o foco para os tópicos abordados, facilitando a compreensão das técnicas de resolução e a percepção do modo como essas técnicas contribuem para a construção do conhecimento. Isso se torna particularmente relevante ao considerarmos a aplicação prática desses conceitos nas áreas de Ciências e Engenharias.

Nesse contexto, a utilização de tecnologias assume um papel crucial ao permitir que tanto professores quanto estudantes compreendam, explorem e aprofundem o conteúdo programático associado a uma determinada disciplina, em especial no contexto do ensino superior. Isso se traduz em uma abordagem mais abrangente e eficaz, que possibilita uma compreensão mais sólida dos conceitos matemáticos e suas aplicações práticas. Ao empregar as tecnologias de forma estratégica, tanto professores quanto alunos podem explorar os aspectos teóricos de maneira mais envolvente e aplicar esses conhecimentos na solução de problemas do mundo real, contribuindo para a formação de profissionais qualificados nas áreas de Ciências e Engenharias.

O currículo do curso de Engenharia Mecânica tem como meta proporcionar aos alunos o domínio das técnicas de resolução de equações diferenciais, focando sua aplicação na solução de problemas práticos. Nesse sentido, merece destaque a exploração de um pêndulo, que consiste em uma massa suspensa por um fio, ligado a um ponto fixo em uma superfície. Esse arranjo possibilita à massa a liberdade de movimento, sujeita às leis da gravidade. Dentro do escopo da diversidade de tipos de pêndulos, este artigo se concentra na análise do pêndulo simples, caracterizado pelo movimento linear da massa. A aplicação prática desse conhecimento se torna especialmente relevante, uma vez que o pêndulo simples é um exemplo concreto de um sistema físico que pode ser encontrado em várias situações na Engenharia e nas Ciências.

O estudo inicial se concentrou na análise do pêndulo simples, visando modelar sua equação e compreender seu comportamento por meio de testes e simulações. A abordagem adotou a Análise de Modelos e explorou o Pensamento Matemático Avançado dos alunos. Com a análise de dados compreendidos por registros escritos dos estudantes, buscamos *o que se pode evidenciar do PMA quanto ao processo de representação de um grupo de alunos ao realizarem a análise de um modelo apoiado por tecnologias digitais*.

As seções a seguir apresentam: o referencial teórico sobre Modelagem Matemática, Modelos e uso de Tecnologias Digitais, Análise de Modelos e uso de Tecnologias Digitais, Pensamento Matemático Avançado, Aspectos Metodológicos, Descrição e Análise da Atividade desenvolvida e Considerações Finais, com reflexões dos autores, evidenciando os recursos tecnológicos utilizados.

Modelagem Matemática, Análise de Modelos e uso de Tecnologias Digitais

É evidente, diante de diversos estudos, como a Matemática é desenvolvida de variadas maneiras, considerando os diferentes sujeitos e o contexto em que eles estão inseridos na sociedade e como ela influencia o avanço da mesma.

A Modelagem Matemática tem um importante papel na busca por compreender a realidade com uma proposta investigativa, baseada em análises realizadas por parte do sujeito, tal como constitui-se como sendo uma importante base para formulação de conceitos matemáticos.

Diante disto, Biembengut e Hein (2011), discorrem sobre como os sujeitos se baseiam na construção de modelos, com objetivo de aumentar sua compreensão sobre determinado tema, levando em conta as limitações de cada sujeito e dos fenômenos investigados. Mais especificamente, Biembengut (1999, p. 20) destaca que, “um modelo é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que traduzem, de alguma forma, um fenômeno em questão”, o que enfatiza o sentido de representação do real para o conceito que envolve o modelo. Isto porque para ela, o modelo é tratado como sendo posterior ao ato de conhecer.

Quanto ao uso de tecnologias digitais envolvendo Modelagem Matemática, Almeida, Silva e Vertuan (2012) destacam como justificativas que a tecnologia:

> a) possibilita lidar com situações-problema mais complexas e fazer uso de dados reais, ainda que estes sejam em grande quantidade ou assumam valores muito grandes; b) permite que maior parte dos esforços se concentre nas ações cognitivas associadas ao desenvolvimento da atividade de modelagem, considerando que a realização de cálculos, aproximações e representações gráficas é mediada pelo uso do computador; c) possibilita lidar com situações-problema por meio de simulações numéricas ou gráficas, variando a parâmetros nas representações gráficas e (ou) algébricas (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 31- 32).

A fim de compreender possíveis relações entre o uso de tecnologias digitais e a aprendizagem dos sujeitos, Borssoi (2013), investigou como os estudantes podem desenvolver uma aprendizagem significativa a partir de atividades que fazem uso de Modelagem Matemática e recursos tecnológicos, de modo que o uso desta última se faz presente no decorrer de processos que circundam o ensino e a aprendizagem. Enfatiza, ainda, a eficácia do uso de tecnologias em sala de aula e a maneira como o encaminhamento metodológico proposto pelo professor pode implicar em diversas vantagens que auxiliam no processo de construção da aprendizagem de conceitos e ideias.

Em sua pesquisa, Borssoi (2013, p. 152) considera que “oferecer um ambiente, desde as aulas, que disponha de tais recursos, bem como propor atividades que provoquem os alunos a lançar mão da tecnologia, pode promover a motivação ao uso" e, que as atividades de Modelagem Matemática, em especial, parecem provocar os alunos a buscar tais recursos.

Na literatura, há o entendimento de alguns autores, como Javaroni e Soares (2012), de que tão importante quanto à construção de modelos matemáticos para resolver problemas da realidade é a análise e exploração de modelos matemáticos clássicos. Assim, consideramos a Modelagem Matemática, na perspectiva da Análise de Modelos.

Esta perspectiva é considerada como uma abordagem que possui características próprias e que podem ser trabalhadas e desenvolvidas simultaneamente ou de modo complementar ao processo de Modelagem Matemática. Segundo Javaroni e Soares (2012) a Análise de Modelos existentes requer perpassar as etapas: i) estudo do fenômeno; ii) estudo das hipóteses consideradas para a elaboração do modelo; iii) entendimento do que cada termo do modelo diz sobre o fenômeno; iv) estudo do comportamento da(s) solução(ões) do modelo, relacionando este comportamento com o fenômeno e com as hipóteses consideradas; v) estudo da influência dos parâmetros do modelo no comportamento de sua(s) solução(ões), o que permite fazer previsões e analisar a influência de possíveis intervenções no fenômeno; vi) análise das limitações do modelo.

Ainda com base nas autoras, o uso de tecnologias digitais no processo de análise de modelos matemáticos é essencial, uma vez que eles podem auxiliar positivamente a análise, tornando mais real e fiel, de modo a propiciar uma análise crítica do modelo como uma estratégia pedagógica, possibilitando a observação e compreensão do comportamento de equações e o estudo de variados fenômenos.

Pensamento Matemático Avançado

Diante dos diversos autores que trabalham com o Pensamento Matemático Avançado, podemos evidenciar: Dreyfus (1991) e Tall (1991). Dado que suas ideias coincidem em afirmar que o PMA permeia a aprendizagem de variadas definições matemáticas complexas que tendem a surgir nos diferentes níveis escolares. Mas, para os autores, se tornam mais evidentes nos anos finais do Ensino Médio e ao longo do Ensino Superior.

A prática do professor de matemática quanto aos processos que envolvem PMA, segundo Dreyfus (1991), é importante para que ele compreenda as dificuldades de seus alunos, tal como visualizar os indícios que se referem às fases deste tipo de pensamento. Isto está ligado à reflexão do professor sobre seu saber, o que propicia a criação de contextos propícios para o desenvolvimento dos processos de pensamento avançado. Ele ainda afirma que a compreensão de situações matemáticas complexas envolve dois processos em especial: o de representação e o de abstração, no qual o estudante tende a permear de um nível de detalhe e observação a outros, de modo dialético e indissociável.

Portanto, para Dreyfus (2002), o PMA pode ser entendido como sendo uma série de processos de representações, visualizações, generalizações etc., cujo objetivo é classificar, conjecturar, induzir, analisar, sintetizar, abstrair ou formalizar determinado pensamento acerca do conteúdo desenvolvido. Em especial, é focado em conceitos de abstração e generalização, que se subdividem em representação (de 1 a 5) e abstração (de 6 e 7), conforme segue:

1. Simbólica: manifestar um objeto ou processo matemático por meio de símbolos, notação ou de outra forma; utilizar símbolos como se fossem objetos mentais.
2. Mental: representar como vemos um objeto ou processo matemático, juntamente com a utilização de suas propriedades; sintetizar ou resumir os conhecimentos para o pequeno foco de atenção, para um objeto mental.
3. Visualização: utilizar uma imagem, como forma de representação mental.
4. Mudança de representações e alternâncias entre elas: ter várias representações de um mesmo conceito e saber utilizá-las em conjunto e, se necessário, mudar para uma representação mais eficiente (auto regulação); basicamente, se refere a utilizar os processos de representação em um problema aplicado.
5. Modelação: formular uma estrutura ou teoria matemática que tenham as características de um objeto ou situação física, obtendo um modelo, que pode ser considerado como uma estrutura mental.
6. Generalização: se refere a derivar ou induzir a partir de informações, cujo intuito é identificar pontos em comum e expandir domínios de validade.
7. Sintetização: compor partes de tal modo a formar um todo.

De modo geral, o processo de representar é aquele que gera um exemplo, uma imagem, uma noção sobre o que está se estudando e observando, está presente em registros escritos, desenhos, falas, gestos ou indícios de pensamentos que caracterizam essas especificações. Enquanto o processo de abstrair está relacionado com os subprocessos de generalizar e sintetizar; para o caso do primeiro (generalizar), espera-se que o sujeito consiga induzir do particular, identificando particularidades e expandindo domínios de validade, e para o segundo (sintetizar), o intuito é que o sujeito possa combinar ou compor partes com objetivo de formar um todo, um objeto matemático, de tal maneira que ambos os processos são indissociáveis.

Dreyfus (2002) considera que o PMA é atingido após uma diversidade de processos interagirem entre si e vai muito além de provas e deduções, pois envolve um processo criativo, o que evidencia que a aprendizagem e construção de significados e conceitos acontecem quando o estudante desenvolve a capacidade de construir significados, refletir sobre definições, construir um objeto abstrato e compor uma entidade final. Considerando estes referenciais, passamos aos aspectos metodológicos da pesquisa em desenvolvimento.

Aspectos Metodológicos

A pesquisa tem como contexto educacional investigado a disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias para turmas de Engenharia Mecânica. Os dados para este artigo são da turma do primeiro semestre letivo de 2023, com 45 alunos matriculados. A atividade a que nos referimos se desenvolveu como Modelagem Matemática com ênfase na análise do modelo do movimento de um pêndulo simples.

A atividade foi planejada pelas duas primeiras autoras: a primeira participou durante seu estágio de docência, e a segunda como professora da turma. O desenvolvimento da atividade se deu com os alunos organizados em 10 grupos, de 3 ou 4 integrantes, durante dois encontros de 100 minutos. Os dados em que nos apoiaremos na análise são registros escritos produzidos pelos alunos, em especial nos constantes no relatório final dos grupos. A pesquisa se inspira na Análise de Conteúdo como metodologia, uma estratégia de análise constituída de um conjunto de técnicas que são utilizadas em análise de dados qualitativos (BARDIN, 2011).

Segundo Bardin (2011), o foco da análise (que compreende: i) pré-análise; ii) exploração do material, categorização ou codificação; iii) tratamento dos resultados, inferências e interpretação) é qualificar as vivências do sujeito, bem como suas percepções sobre determinado objeto e seus fenômenos (em nossa pesquisa se referem a compreensão do modelo que rege o movimento do pêndulo simples). Além disso, a análise de conteúdo também pode ser utilizada para o aprofundamento de estudos quantitativos - o que é de interesse da primeira autora, em um estudo mais abrangente referente à dissertação - e, portanto, tem uma visão matemática dessa abordagem.

Considerando que o trabalho de análise da pesquisa mais ampla, no mestrado, está em fase inicial, trazemos neste artigo dados do Grupo A, buscando *o que se pode evidenciar do PMA quanto ao processo de representação de um grupo de alunos ao realizarem a análise de um modelo apoiado por tecnologias digitais*.

Descrição e Análise da Atividade

O desenvolvimento da atividade se deu orientado pelos preceitos sobre Modelagem Matemática e Análise de Modelos, conforme indicado na Figura 1, a seguir:

Figura 1 - Informações disponibilizadas no Moodle para o desenvolvimento da atividade

Objetivo: realizar a análise do modelo da equação diferencial que descreve o movimento do Pêndulo Simples.

A Análise de Modelos requer que os seguintes aspectos sejam evidenciados:

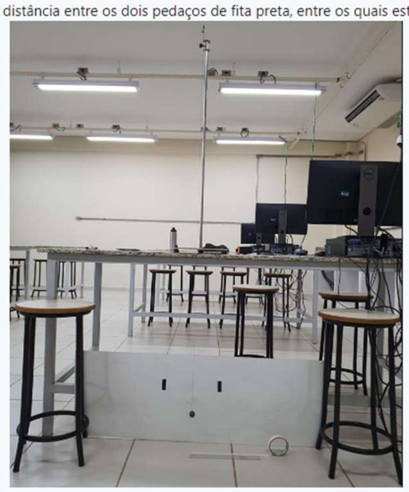
i) estudo do fenômeno em questão;
ii) estudo das hipóteses consideradas para a elaboração do modelo;
iii) entendimento do que cada termo do modelo diz sobre o fenômeno;
iv) estudo do comportamento da(s) solução(ões) do modelo, relacionando este comportamento com o fenômeno e com as hipóteses consideradas;
v) estudo da influência dos parâmetros do modelo no comportamento de sua(s) solução(ões), o que permite fazer previsões e analisar a influência de possíveis intervenções no fenômeno;
vi) análise das limitações do modelo.

Para isso, é desejavel que vocês realizem a Modelagem Matemática a partir de dados experimentais, o que permite comparar os resultados do modelo teórico com os obtidos experimentalmente. Assim, disponibilizamos a gravação do experimento realizado com dois comprimentos de fio para quatro ângulos diferentes, como apresentado no Quadro 1.

Quadro 1: Link para os vídeos do experimento com Pêndulo Simples

Compr. do fio	**ângulo 1**	**ângulo 2**	**ângulo 3**	**ângulo 4**
	2,5°	**5,0°**	**7,5°**	**10,0°**
Fio 1: 1720mm	fio1_angulo1	fio1_angulo2	fio1_angulo3	fio1_angulo4
Fio 2: 1549mm	fio2_angulo1	fio2_angulo2	fio2_angulo3	fio2_angulo4

Na Figura, a "esfera" acoplada ao fio, próxima ao piso, tem diâmetro de 13,1mm e a distância entre os dois pedaços de fita preta, entre os quais está o pêndulo, é de 24cm.



Fonte: arquivos da pesquisa

Os estudantes já conheciam e tinham trabalhado com expressões como: modelagem matemática e modelo matemático, dado que já haviam desenvolvido outras atividades que seguiam essa mesma perspectiva. Os estudantes também já haviam tido contato com a problemática em questão na aula de Física, na qual realizaram um experimento de laboratório, coletaram dados e os analisaram com o intuito de compreender o movimento harmônico e estimar parâmetros como o valor da gravidade no laboratório de Física e o período do pêndulo, no entanto, sem a abordagem de EDO.

Foi enfatizado, em um primeiro momento, que era necessário que eles realizassem a Modelagem Matemática a partir de dados experimentais, para que fosse possível que eles comparassem o modelo teórico com aquele obtido experimentalmente. Para tal, foram disponibilizadas gravações do experimento realizado por todos os autores do artigo, com dois comprimentos de fio e quatro ângulos diferentes (Figura 1).

Na primeira ocasião, a abordagem não foi diretamente por meio de EDO, dado que eles poderiam realizar o estudo a partir da compreensão do movimento harmônico simples que ocorre devido a conservação da energia mecânica. O movimento periódico e oscilatório tem diversas aplicações nos campos da engenharia e suas áreas técnicas, logo, o pêndulo simples é um exemplo de oscilador, tanto quanto as oscilações amortecidas e forçadas. Segundo Zill e Cullen (2001, p. 16):

> Qualquer objeto pendurado em movimento pendular é chamado pêndulo físico. O pêndulo simples é um caso especial de pêndulo físico e consiste em uma haste com uma massa atada em uma das extremidades. Para descrever o movimento de um pêndulo simples, desprezamos qualquer força exterior de amortecimento agido sobre o sistema (tal como a resistência do ar).

A partir daí, os estudantes voltaram-se a compreender a modelagem que resulta na equação do movimento do pêndulo, encontrando sua solução e realizando análise do modelo a partir de dados reais. Para isso, eles foram orientados a buscar fundamentação na literatura, bem como nos conhecimentos prévios das aulas de Física e EDO.

Em um primeiro momento, considerando a Análise de Modelos e suas etapas, dado o objetivo de que os estudantes compreendessem a equação que rege os movimentos de um pêndulo simples foi possível observar que, pode haver limitações desse modelo e também que há distintos modelos para uma mesma situação. Assim como, considerando o papel das hipóteses para se obter diferentes questões de um mesmo fenômeno, foi realizada uma videoanálise com o intuito de comparar dados obtidos. Podemos ressaltar então que os estudantes realizaram o estudo do fenômeno em questão.

Na mesma linha de pensamento, era esperado que eles investigassem a influência de parâmetros, compreendendo o modelo matemático, e observando como era possível adaptá-lo conforme as condições do ambiente, como por exemplo o valor da aceleração da gravidade no laboratório em que os dados foram coletados e as consequências devido a alteração no comprimento do fio.

No relatório, o Grupo A apresentou a exploração de conceitos relacionados ao pêndulo simples: abordaram sobre o conceito de torque, comparando-o com a Segunda Lei de Newton e a partir de então o momento de inércia, a massa do eixo de rotação e a aceleração angular, deduzindo então o modelo para um pêndulo simples, baseados na literatura $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} sen(\theta) \ = 0$.

Discorrendo sobre, eles observaram que a primeira derivada em relação ao tempo representa a velocidade angular, enquanto a segunda derivada representa a aceleração angular e então a resolução da equação obtida utiliza conceitos aprendidos na disciplina de EDO, dando início ao estudo das hipóteses consideradas para a elaboração do modelo.

Neste momento, o grupo apresentou um subtópico denominado “resultado” (Figura 2), concluindo que, dada a equação descrita como (11), foi obtido:

Figura 2 - Resultado obtido pelos alunos

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} =-\ (\frac{g}{L})Sen\theta \qquad (11)$$

Para a resolução dessa equação, serão utilizados conceitos aprendidos durante a disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO).

RESULTADOS

A EDO presente na equação 11 é de segunda ordem e não linear. A fim de resolvê-la, toma-se o conceito de linearização. Para isso, assume-se os valores de θ como pequenos, pequenos o suficiente para que a aproximação do seno de theta seja aproximadamente theta. Dessa forma, a equação 11 é simplificada.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} =-\ (\frac{g}{L})\theta \qquad (12)$$

Assim, encontra-se uma equação de segunda ordem e homogênea. Agora, escreve-se a EDO na forma caraterística.

$$\lambda^2 + \frac{g}{L} = 0 \qquad (13)$$

Fonte: relatório do Grupo A

Ainda, foi possível evidenciar o que se refere ao entendimento do que cada termo do modelo diz sobre o fenômeno, isto porque eles encontraram parâmetros que os levaram para a solução na forma geral na equação (14) da Figura 3.

Figura 3 - Parâmetros encontrados

Encontrando $\lambda_1 = \sqrt{-\frac{g}{L}}$ e $\lambda_2 =- \sqrt{-\frac{g}{L}}$, nota-se que a solução geral será composta por números complexos. Realizando algumas manipulações algébricas na fórmula de Euler, e aplicando os valores encontrados λ, chega-se a uma solução geral na forma real.

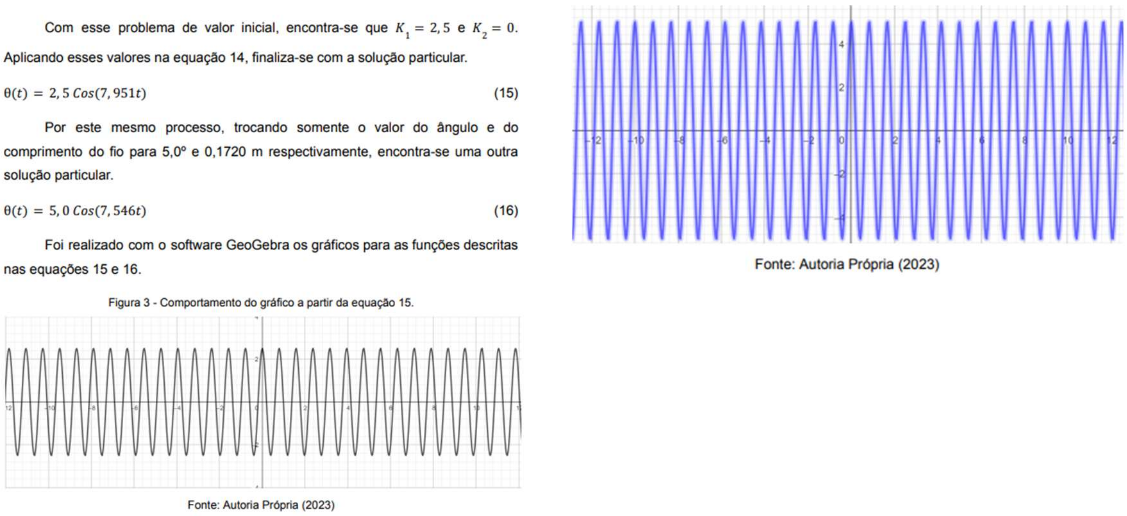
$$\theta(t) = K_1Cos(\sqrt{\frac{g}{L}}t) + K_2Sen(\sqrt{\frac{g}{L}}t) \qquad (14)$$

Fonte: relatório do Grupo A

A partir de então, foi iniciado o estudo do comportamento da(s) solução(ões) do modelo, relacionando este comportamento com o fenômeno e com as hipóteses consideradas para o comprimento e angulação, realizando o estudo de um PVI (Problema de Valor Inicial), a fim de encontrar constantes. Juntamente com este tópico, os alunos iniciaram estudo da influência dos parâmetros do modelo no comportamento de sua(s) solução(ões), o que permite fazer previsões e analisar a influência de possíveis intervenções no fenômeno. Considerando os vídeos que foram disponibilizados a eles, que tinha como intuito auxiliar na realização da simulação, eles obtiveram valores para as tais constantes e aplicaram-nos na solução particular e depois realizaram a validação no software Geogebra, descrevendo as funções descritas na Figura 4 (a e b) como expressões (15) e (16):

Figura 4 - Constantes de integração obtidas e representação gráfica das soluções

(a) (b)



Com esse problema de valor inicial, encontra-se que $K_1 = 2,5$ e $K_2 = 0$. Aplicando esses valores na equação 14, finaliza-se com a solução particular.

$$\theta(t) = 2,5\,Cos(7,951t) \qquad (15)$$

Por este mesmo processo, trocando somente o valor do ângulo e do comprimento do fio para 5,0º e 0,1720 m respectivamente, encontra-se uma outra solução particular.

$$\theta(t) = 5,0\,Cos(7,546t) \qquad (16)$$

Foi realizado com o software GeoGebra os gráficos para as funções descritas nas equações 15 e 16.

Figura 3 - Comportamento do gráfico a partir da equação 15.

Fonte: Autoria Própria (2023)

Fonte: Autoria Própria (2023)

Fonte: relatório do Grupo A

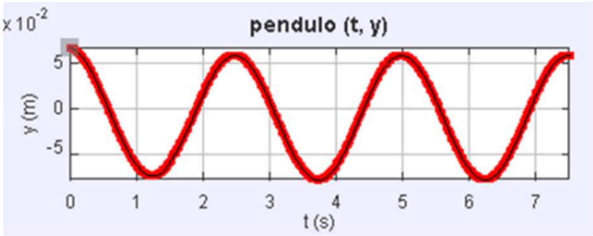
Considerando os aspectos da Análise de Modelos, os estudantes utilizaram dos vídeos divulgados pelas professoras e realizaram a videoanálise e obtiveram a análise das limitações do modelo, explicando como o software funciona e a análise referente ao eixo x e y pelo tempo. Finalizando a compreensão e análise do modelo, considerando e evidenciando suas limitações, como o fato do modelo obtido mostrar que o tempo da oscilação do pêndulo simples não depende, necessariamente, da massa do objeto que se encontra a oscilar. E, para tal, é necessário considerar que a oscilação ocorre apenas em ângulos pequenos, de maneira que o seno do ângulo θ seja muito próximo ao próprio valor de θ, em graus, o que implica na simplificação realizada ao linearizar a EDO (11), chegando na EDO (12) da Figura 2, o que foi possível concluir após uma análise realizada no Tracker.

O Tracker é um software livre que pode ser executado em qualquer sistema operacional, desde que ele tenha o programa Java, em que é utilizado para coleta de dados referentes a sistemas físicos, por meio da videoanálise. O procedimento requer que o usuário realize a filmagem do fenômeno físico em que deseja estudar e o carregue no software e este se encarrega de registrar os dados e plotar gráficos relativos ao vídeo, além de oferecer ferramentas para realizar sua análise detalhada.

Figura 5 - Análise realizada no Tracker

O software então analisa o movimento do ponto de massa em todos os quadros selecionados do vídeo, fornecendo um gráfico da posição no eixo Y por tempo.

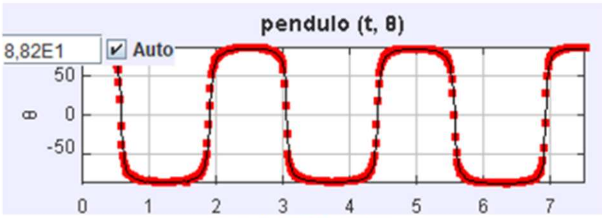
Figura 6 - Análise do eixo Y pelo tempo.



Fonte: Autoria Própria (2023)

Para evidenciar o ângulo do fio do pêndulo, rotaciona-se o eixo X do ponto de referência de modo que ele fique vertical, e modifica-se os parâmetros do gráfico apresentado.

Figura 6 - Análise do eixo X pelo tempo.



Fonte: Autoria Própria (2023)

Denota-se então uma semelhança entre a Figura (3) e a Figura (6), indicando que o modelo encontrado pelo método de resolução de EDO está coerente com o modelo obtido pela vídeo análise.

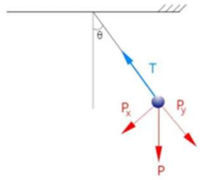
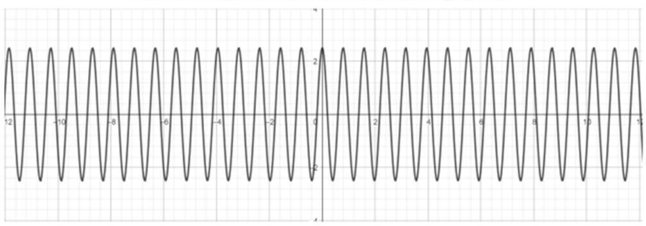
Fonte: relatório do Grupo A

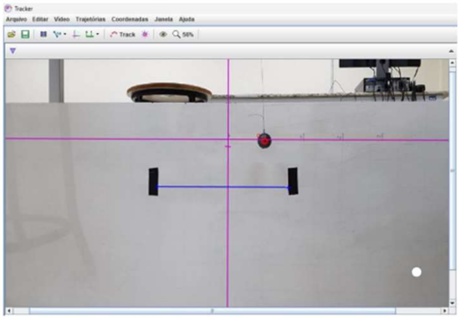
De modo geral, quanto ao Pensamento Matemático Avançado, é possível enfatizar que o Grupo A apresentou evidências referentes à representação Simbólica, ao expressarem através de equações matemáticas, o movimento que rege um pêndulo simples, realizando o estudo dos elementos que compõem o modelo até a obtenção final dele. A partir de então, um estudo acerca das equações e conceitos levaram à representação Mental, o que é garantido por Dreyfus (2002) quando aborda tais evidências.

O uso de figuras para representação do movimento pendular, pode evidenciar o processo de Visualização. Mas, vale ressaltar que, foi realizada a utilização da mudança de representações e alternâncias para compreensão do modelo, isto porque eles obtiveram, a partir de um problema inicial, meios para se chegar em uma EDO que representava o movimento de um pêndulo simples. Portanto, realizaram o processo de Modelação, no qual eles descrevem a equação coerente e explícita, seja ela no caso geral ou particular.

Portanto, em síntese, evidenciamos nos registros do relatório do Grupo A os seguintes indícios quanto ao processo de representação, descritos na seção teórica:

Quadro 1 - Processo de Representação referente à análise da atividade

REPRESENTAÇÕES	DESCRIÇÃO	EVIDÊNCIAS (a partir de recorte do relatório do grupo)
Simbólica	Momento em que o grupo conseguiu manipular os símbolos como se fossem objetos mentais;	No pêndulo simples, a oscilação ocorre com base nas forças peso e tração. Decompondo a força peso nos eixos x e y, adquire a seguinte figura e equações. Figura 2 - Decomposição de Forças no Diagrama de corpo livre.  Fonte: Mundo Educação (2023) $Px = PSen\theta$ (6) $Py = PCos\theta$ (7)
Mental	Quando eles conseguiram representar os processos matemáticos seguindo suas propriedades;	$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{g}{L}\right)Sen\theta$ (11) Para a resolução dessa equação, serão utilizados conceitos aprendidos durante a disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO). **RESULTADOS** A EDO presente na equação 11 é de segunda ordem e não linear. A fim de resolvê-la, toma-se o conceito de linearização. Para isso, assume-se os valores de θ como pequenos, pequenos o suficiente para que a aproximação do seno de theta seja aproximadamente theta. Dessa forma, a equação 11 é simplificada. $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{g}{L}\right)\theta$ (12)
Visualização	Utilizaram imagens para realizar representações;	Foi realizado com o software GeoGebra os gráficos para as funções descritas nas equações 15 e 16. Figura 3 - Comportamento do gráfico a partir da equação 15.  Fonte: Autoria Própria (2023)

Mudança de representações e alternâncias entre elas	Conseguiram fazer mais de uma inferência acerca do mesmo modelo;	Além da análise através da resolução da EDO, foi realizado uma vídeo análise para uma condição, L= 0,1549 m e θ=2,5º. Após inserir o vídeo no software, definiu-se uma medida de referência no vídeo. Sabendo que a distância entre as duas fitas é de 24cm, utiliza-se a ferramenta bastão de medição (linha azul) para evidenciar essa distância. Em seguida foi definido um eixo de coordenadas como referencial (linha roxa) e um ponto de massa que será objeto de análise do software. Figura 5 - Análise pelo Tracker.  Fonte: Autoria própria (2023)
Modelação	Obtiveram um modelo, que pode ser considerado como uma estrutura mental;	Com esse problema de valor inicial, encontra-se que $K_1 = 2,5$ e $K_2 = 0$. Aplicando esses valores na equação 14, finaliza-se com a solução particular. $\theta(t) = 2,5\,Cos(7,951t)$ (15) Por este mesmo processo, trocando somente o valor do ângulo e do comprimento do fio para 5,0º e 0,1720 m respectivamente, encontra-se uma outra solução particular. $\theta(t) = 5,0\,Cos(7,546t)$ (16) Foi realizado com o software GeoGebra os gráficos para as funções descritas nas equações 15 e 16.

Fonte: autoras.

Quanto aos processos de representações, é importante ressaltar que, para cada etapa os alunos se utilizaram de tecnologia. Para a Representação Simbólica e Mental, eles realizaram pesquisas e escreveram sobre a obtenção do modelo a partir de buscas na Internet, em textos e vídeos. Enquanto que, para os processos de Visualização e Mudança de representações e alternâncias entre elas, os estudantes utilizaram softwares como o Geogebra e o Tracker, que auxiliaram na compreensão do modelo e sua análise e, consequentemente, eles influenciaram na obtenção do modelo, isto é, na fase de Modelação.

Mas, além desses processos de representação do PMA, há o processo de abstração, quanto a ele, podemos ressaltar que eles inferem sobre Generalização, dado que eles apresentam indícios e identificam pontos em comum e expandem conceitos e questões abordadas e consideradas no trabalho, como é possível observar na Figura 6:

Figura 6 - Evidências do processo de Generalização

Dessa forma, é possível analisar todos os valores de encontrados com o valor da aceleração obtido no experimento com o acelerômetro, como está disposto na tabela (2).

Tabela 2 - Valores para aceleração.

'a' pela EDO	'a' pelo Gráfico	'a' pelo acelerômetro
0,4738	0,4316	0,40

Fonte: Autoria Própria (2023)

Fonte: relatório do grupo A.

Isto porque os estudantes conseguiram inferir a partir de informações que eles já tinham obtido, identificando pontos em comum e expandindo domínios de validade: comparando os valores teóricos obtidos com aqueles que foram fornecidos pelo acelerômetro, com objetivo de validá-los.

Considerações Finais

O objetivo do artigo foi relatar e apresentar o desenvolvimento de uma atividade que visou evidenciar aspectos do Pensamento Matemático Avançado e a Análise de Modelos com apoio de tecnologias digitais. Mas, em específico, buscando evidências do processo de representação de um grupo de alunos ao realizarem a análise de um modelo apoiado por tecnologias digitais. De modo geral, a atividade proposta se baseou em Modelagem Matemática, promovendo um ambiente em que os estudantes pudessem ter uma postura investigativa, sendo protagonistas da sua própria aprendizagem, encontrando soluções para situações-problemas que envolveu a obtenção de um modelo matemático, a partir do movimento de um pêndulo simples, com suporte de tecnologias digitais. Com isso, estabeleceu-se um cenário que aproximou os conceitos teóricos estudados com os reais, compreendendo seus parâmetros e variáveis.

A partir do software Tracker, os estudantes realizaram uma videoanálise, evidenciando conceitos matemáticos e propiciando que eles compreendessem o modelo como um todo, visualizando sua representação gráfica e comparando-a com dados empíricos. Além disso, o Moodle como ambiente virtual possibilitou que professoras e estudantes trocassem arquivos e dúvidas, tal como a visualização e feedback durante o período de realização da atividade dos grupos, sem a necessidade de se ter um material físico. Sem o uso de tais tecnologias, estimamos que a compreensão do modelo poderia ser dificultada.

Consideramos que a análise do relatório escrito como única fonte de dados é limitante, pois embora tenha permitido evidenciarmos diferentes processos de representação, não permitiu identificar o que ocorreu ao longo das discussões do grupo ou em momentos de interação com as professoras, tendo em vista que, para Dreyfus (1991) e Tall (1991), o processo de representar pode estar presente em registros escritos, desenhos, falas, gestos, etc. Assim, para aprimorar a análise entendemos que será necessário ampliar o *corpus* da análise agregando registros de áudio e vídeo, bem como de respostas dos estudantes às questões de avaliação somativa que versavam sobre a análise de modelo realizada. Isso poderá permitir evidenciar indícios dos processos de Generalização e de Sintetização, por exemplo.

A observação, obtenção e compreensão de modelos clássicos que interessam aos cursos de Engenharia são de fundamental importância. E, para tal, o uso de tecnologia dentro e fora de sala de aula se torna algo útil, prático e acessível à maioria dos estudantes no contexto em que se deu a pesquisa. Além disso, ela tende a aproximar situações do mundo real a modelos teóricos, de modo rápido e prático. Possibilitando, assim, que o estudante consiga entender modelos matemáticos presentes no seu meio, com auxílio da Análise de Modelos, tal como é possível notar e evidenciar indícios do Pensamento Matemático Avançado, por meio da Análise de Conteúdo.

Referências Bibliográficas

ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na educação básica.** São Paulo: Contexto, 2012. 157 p.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 2011.

DREYFUS, T. **Advanced Mathematical Thinking Processes**. En: TALL,D. (Ed..) Advanced Mathematical Thinking. Dordrecht: Kluwer, 1991, p.25-41.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem Matemática & Implicações no Ensino Aprendizagem de Matemática.** Editora da FURB: Blumenau, 1999.

BIEMBENGUT, M. S; HEIN, N. **Modelagem Matemática para o Ensino.** 5 ed. São Paulo: Contexto, 2011. p. 158.

BORSSOI, A. H. **Modelagem matemática, aprendizagem significativa e tecnologias:** articulações em diferentes contextos educacionais, Londrina, 2013.

JAVARONI, S. L.; SOARES, D. S. 2012. **Modelagem Matemática e Análise de Modelos Matemáticos na Educação Matemática**. Acta Scientiae. 14(2):260-275.

DREYFUS, T. **Advanced mathematical thinking processes**. In: TALL, D. Advanced mathematical thinking. Dordrecht: Kluwer, 2002. p. 25-41.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. (2001). **Equações Diferenciais**, volume 1. São Paulo: Pearson Makron Books.