SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES E O GEOGEBRA: INTERPRETAÇÕES GRÁFICAS

Lucas Gabriel Silva Rodrigues de Jesus
Universidade Estadual de Londrina
lucas.rodrigues.jesus@escola.pr.gov.br

Fernanda de Araújo
Universidade Estadual de Londrina
fer.gerrard@homail.com

Magna Natalia Marin Pires
Universidade Estadual de Londrina
magna@uel.br

Resumo
Este trabalho relata o desenvolvimento de uma tarefa matemática que envolve sistemas de equações lineares, utilizando o *software* GeoGebra (plataforma interativa de geometria álgebra, gratuita), em um 1° Ano do Ensino Médio de uma escola pública de Londrina, a atividade faz parte do Programa Residência Pedagógica Matemática/UEL. Para o planejamento das tarefas foram realizados estudos de documentos curriculares e artigos de Duval que tratam de registram de representações de objetos matemáticos. A estratégia metodológica adotada foi a Investigação Matemática, com a qual buscou-se incrementar a interpretação geométrica desses conceitos. A experiência indica que a utilização do software foi um meio para a construção do conhecimento, pode-se inferir que os estudantes compreenderam as relações entre as retas e as soluções dos sistemas.

Palavras-chave: Sistemas de Equações Lineares. GeoGebra. Gráficos. Residência Pedagógica.

Introdução

Este artigo relata a experiência dos dois primeiros autores desse relato, discentes do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL/PR), orientados pela terceira autora no Programa Residência Pedagógica.

Os autores elaboraram e executaram um plano de aula, desenvolvido no eixo temático da Álgebra, Sistemas de Equações Lineares, sob a perspectiva geométrica, com a estratégia metodológica da investigação matemática, potencializada com uso do *software* GeoGebra. O planejamento foi aplicado em duas turmas do 1° Ano A e B do Ensino Médio de um colégio público estadual da cidade de Londrina, para esse relato escolhemos descrever momentos ocorridos na turma A.

Para iniciar a elaboração das tarefas os autores se apoiaram nas seguintes habilidades da BNCC (Base Nacional Comum Curricular):

> **(EM13MAT301)** Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais. (BRASIL, 2018, p. 528).
> **(EM13MAT401)** Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica. (BRASIL, 2018, p. 531).

Tais habilidades vão ao encontro das publicações de autores da Educação Matemática. Duval (2009) argumenta sobre a importância de se mobilizarem distintos registros de representação para o estudo de um objeto matemático, uma vez que o estudo das representações é indispensável para a elaboração conceitual. Segundo ele, é por meio das representações que ocorre o processo de objetivação com o qual o indivíduo toma consciência de forma intencional de certos aspectos do objeto representado.

O autor defende ainda que a apreensão significativa de um objeto matemático só é possível mediante a conversão de uma representação elaborada em um registro de partida em outra representação elaborada em um registro de chegada. Para esse autor, a noção de representação é essencial em matemática, pois nesta área do conhecimento humano uma escrita, uma notação ou mesmo um símbolo representa objetos matemáticos abstratos, sejam eles números, equações, funções, sistemas, entre outros.

Desta maneira, o trabalho sob a perspectiva geométrica de mais de um tipo de representação para os Sistemas de Equações Lineares, podem favorecer a compreensão deste objeto matemático, além de que, "não se pode ter compreensão em matemática, se nós não distinguimos um objeto e sua representação" (DUVAL, 2009, p. 14).

Considerando a importância de vários tipos de representação para os sistemas de equações lineares associada à estratégia de Investigações Matemáticas proposta por Rocha e Ponte (2009), que consideram que a realização de investigações matemáticas pelos alunos pode contribuir na aprendizagem de ideias e conceitos matemáticos, desenvolvem conhecimentos transversais, como a capacidade de comunicação e trabalho em grupo, além de contribuir na formação de novas concepções e atitudes em relação à Matemática, decidiu-se planejar a aula sob essas perspectivas. Para Ponte Brocado e Oliveira (2006), investigar em Matemática

> assume características muito próprias, conduzindo rapidamente à formulação de conjecturas que se procuram testar e provar, se for o caso. As investigações matemáticas envolvem, naturalmente, conceitos, procedimentos e representações matemáticas, mas o que mais fortemente as caracteriza é este estilo de conjectura-teste-demonstração. (PONTE, BROCARDO e OLIVEIRA, 2006, p. 10).

Love (1988, apud PONTE, 1998, p. 260) define as investigações matemáticas implicitamente ao afirmar que os alunos devem ter oportunidade de expressar e defender suas ideias, identificar problemas e ao resolvê-los, os resultados devem ser sujeitos à crítica ponderada.

Além dessas ideias, consideramos que a utilização de ferramentas tecnológicas durante a investigação proporciona uma nova experiência ao aluno, possibilitando um melhor aproveitamento no processo investigativo, pois essas ferramentas facilitam a coleta de dados e testes de conjecturas, tornando a investigação mais organizada. Para isso escolhemos o programa GeoGebra, que de acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), é um "suporte tecnológico que permite o desenho, a manipulação e a construção de objetos geométricos, facilita a exploração de conjecturas e investigação de relações que precedem o uso do raciocínio formal" (PONTE, BROCARDO e OLIVEIRA, 2006, p. 83).

Petla e Rolkowski (2008) relata que a tecnologia por si só não mudará a educação, e sim a forma que esta ferramenta será utilizada pelo professor, o qual deverá desenvolver um espírito investigador, deixando a zona de conforto, na qual se sente apto a desenvolver todas as atividades com domínio total sobre o assunto e as respostas, para entrar na zona de risco, na qual o novo está em evidência. Porém, com essa utilização pode haver uma interação maior entre os indivíduos em virtude da diversidade de situações e dúvidas geradas em um ambiente novo.

Apoiados na importância das representações, nas investigações matemáticas e na utilização de tecnologia, apresentamos os objetivos específicos das tarefas.

- Representar graficamente uma equação do 1º grau utilizando o GeoGebra.
- Entender uma reta como a representação de uma equação.
- Compreender o significado da conjunção de condições, noção de sistema de equações e a sua interpretação geométrica.
- Interpretar graficamente as soluções de um sistema de equações.
- Reconhecer, a partir de representações gráficas, sistemas possíveis (determinados e indeterminados) e impossíveis.
- Perceber a vantagem do uso do software de geometria dinâmica, GeoGebra, como forma de estudar, em um curto espaço de tempo, uma grande diversidade de casos de sistemas.
- Classificar retas como paralelas, concorrentes e coincidentes.

Relato da Atividade dos Estudantes

Após o planejamento da aula, conversamos com o professor regente para combinarmos quando poderíamos desenvolver as tarefas com os alunos. Acertamos então para a semana seguinte, que foi a última semana do mês de junho, nosso ano letivo estava terminando e esse seria o último trabalho realizado no Programa Residência Pedagógica, já que na sequência iriamos nos formar.

No dia marcado estavam presentes 32 estudantes, que foram encaminhados para o laboratório de informática, onde foram disponibilizados, para a utilização do *software* GeoGebra, um computador com acesso à internet para cada um ou dois estudantes. No primeiro momento os estudantes exploraram as ferramentas básicas do *software*, como: pontos no plano cartesiano, figuras geométricas, as transformações homotéticas destas figuras, escrita e equações, dentre outras.

Em seguida distribuímos a primeira tarefa.

Tarefas

<table>
<tr><td colspan="2">Tarefa 1: Lucas comprou 3 canetas e 2 lápis pagando R$7,20. Danilo comprou 2 canetas e 1 lápis pagando R$4,40. O sistema de equações do 1º grau que melhor representa a situação é:</td></tr>
<tr><td>a) $\begin{cases} x+y=3{,}60 \\ x-y=2{,}20 \end{cases}$</td><td>c) $\begin{cases} 3x+2y=7{,}20 \\ 2x+y=4{,}40 \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>b) $\begin{cases} 3x+y=7{,}20 \\ x+y=4{,}40 \end{cases}$</td><td>d) $\begin{cases} 3x-2y=7{,}20 \\ 2x-y=4{,}40 \end{cases}$</td></tr>
</table>

Após a leitura do enunciado pelos estudantes, a primeira observação deles foi falar de incógnita, que eles não conheciam os valores dos preços da caneta e do lápis, aproveitamos para reforçar o conceito de incógnita, isto é, nota-se que os valores dos objetos não estão declarados, dessa forma são atribuídas representações algébricas, x: valor unitário da caneta; y: valor unitário do lápis.

Destacamos que a escolha das incógnitas implicou na representação dos valores das canetas e dos lápis e não a suas quantidades, estas sim indicadas como os coeficientes dos monômios.

Assim, os residentes interrogaram quais dos sistemas lineares, dentre as alternativas, elucidaram o problema. Rapidamente, indicaram a alternativa correta c). O encaminhamento deu-se pela seguinte fala: se o valor de uma unidade de caneta é representado por x, mantendo-se o valor unitário, para duas canetas, tem-se o dobro do valor da unidade, isto é, $2x$, e assim por diante. E analogamente, temos a representação do preço para o lápis.

Após essa primeira conversa, disponibilizamos a Tarefa 2.

Tarefa 2:
a) Plote o gráfico do sistema de equações que descreve a situação anterior.
b) As retas associadas às equações se encontram em algum ponto, qual a coordenada deste ponto (valor atribuído a x e y)?
c) Resolva o sistema de equações utilizando um dos métodos apresentados em sala de aula (adição, substituição ou outros). Qual a solução do sistema?
d) Qual a relação da solução do sistema com o ponto de encontro das retas?

Após a leitura, comentamos a respeito do termo “plote”. Tínhamos pesquisado no Dicionário Eletrônico Houaiss, adaptação do verbo inglês "to plot", 'fazer um gráfico, mapa ou planta de; marcar ou anotar sobre uma carta ou mapa; localizar por meio de coordenadas etc.'

Orientamos como fazemos para plotar as equações nas coordenadas cartesianas do sistema de equações da alternativa c), da tarefa 1. Colocadas na entrada algébrica do programa, questionaram o que estas retas, na visualização geométrica, significam. Foi explicado que a representação por retas, e não por curvas, por exemplo, é explicada pela proporcionalidade dos valores dos materiais. Isto é, o preço de duas canetas é o dobro do valor de uma; o preço de três canetas é o triplo do valor de uma; assim, para um determinado conjunto de canetas e lápis, o preço é calculado através do produto entre a quantidade de objetos adquiridas pelo valor unitário de cada um.

Figura 1 - Alunos explorando o programa GeoGebra

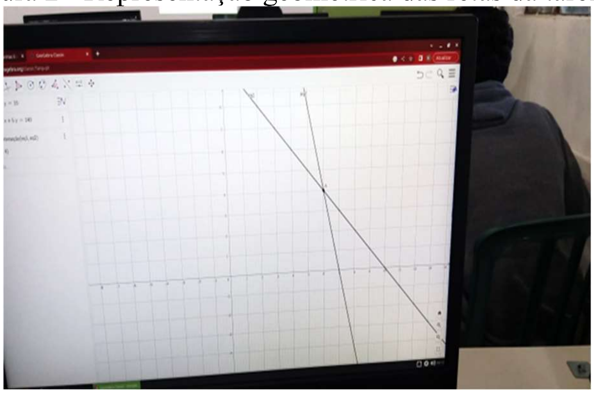
Fonte: os autores

As retas combinadas formam a solução do sistema; isto é, o ponto em que as retas se encontram apresenta as combinações dos preços, isto é, existe um único valor de caneta e de lápis descritos através das equações da alternativa c), que atendem as condições do problema. Logo, conversamos e esclarecemos que todos os métodos anteriores (adição, comparação e substituição) trabalhados anteriormente em sala de aula eram justamente para determinar esses valores.

O ponto de encontro das retas traz a solução dos sistemas da forma que segue.

Tem-se visualizado que a coordenada dos pontos é dada como: (1.6,1.2).

Figura 2 - Representação geométrica das retas da tarefa 1



Fonte: os autores

Foi explanado que as coordenadas do ponto, os valores atribuídos a x e a y, indicam, neste sistema de equações, os números que substituídos nessas incógnitas tornam verdadeiras as igualdades indicadas nas equações. Dessa forma, as colocamos no quadro:

$$1)\quad 3 \cdot 1.60 + 2 \cdot 1.20 =$$

$$4.8 + 2.40 = 7.20$$

$$2)\quad 2 \cdot 1.60 + 1.20 =$$

$$3.20 + 1.20 = 4.40$$

Alguns estudantes se entusiasmaram com a questões de o gráfico dar a solução que antes era realizada com a manipulação das equações, outros pareciam ainda não fazer completamente essa associação. Encaminhamos então a tarefa 3.

Tarefa 3:

Plote o gráfico para cada sistema de equações abaixo. Verifique se há pontos de encontro entre as retas. O que podemos afirmar em relação às soluções?

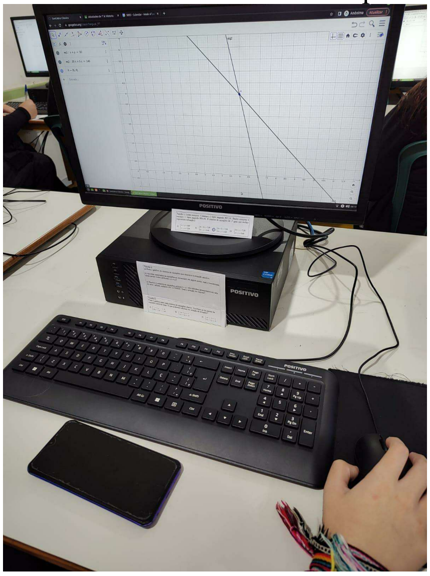
a) $$\begin{cases} x + y = 10 \\ 20x + 5y = 140 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases}$$

c) $$\begin{cases} 3x + 7y = 3 \\ 3x + 7y = 45 \end{cases}$$

a) No sistema linear deste item os estudantes plotaram o gráfico sem nenhuma dificuldade; e notaram que as retas são concorrentes, assim como o sistema linear anterior. Interpretaram, desse modo, a relação da solução do sistema com o ponto de concorrência entre as retas. Após esse momento, realizamos o teste registrando na lousa, atribuindo os valores da coordenada do ponto nas incógnitas x e y.

Figura 3 - equação das retas concorrentes e suas representações geométricas



Fonte: os autores

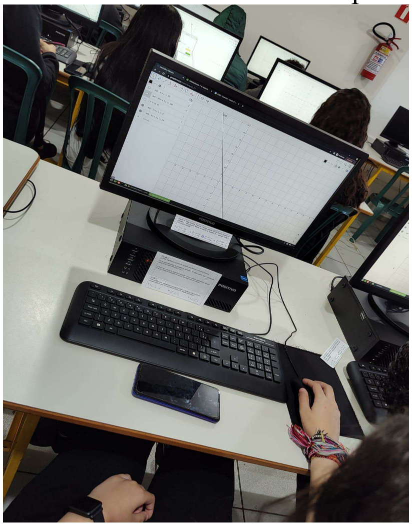
Notamos que a partir dessa solução mais estudantes compreenderam a relação entre a solução algébrica e a solução geométrica, e mais conversamos a respeito da condição de existência de solução dos sistemas lineares. Nos próximos itens foram tratados de retas (equações lineares) coincidentes ou paralelas, respectivamente, e como estas se relacionam com a condição de existência estabelecida.

b) Neste sistema os estudantes digitaram as equações das retas na entrada, no entanto, buscaram visualizar ambas as retas, sem sucesso, pois como anunciamos, as retas são coincidentes. Para confirmar essa ideia, indicou-se a ocultação de uma das retas e observar a outra; logo notaram que estavam sobrepostas.

Desta maneira, conversamos a respeito da relação das retas coincidentes com a solução do sistema. Para que eles compreendessem, orientamos para que atribuíssem um ponto de encontro entre as retas e verificassem se as coordenadas deste ponto, quando atribuídas as incógnitas, tornam verdadeiras as igualdades do sistema. Após a constatação, notaram que para qualquer ponto nas retas sobrepostas, tem-se uma solução. Portanto, com esse exemplo discutimos a ideia da infinidade de soluções, interpretada pela coincidência entre as retas.

Neste momento fizemos o questionamento: - Como podemos reconhecer a relação de coincidência das retas pela equação? A conclusão foi: Se todos os coeficientes da equação são proporcionais, incluindo termo independente, tem-se, então, representação de retas coincidentes.

Figura 4 - equação das retas coincidentes e suas representações geométricas



Fonte: os autores

c) Os alunos notaram que não era possível determinar um ponto de concorrência entre as retas. Eles utilizaram a lupa para ampliar a janela de visualização do gráfico, a fim de se encontrar o ponto; no entanto, não tiveram sucesso.

Assim, questionamos:

- O que podemos afirmar quanto à solução do sistema linear?

Eles responderam: - Como não há ponto de encontro entre as retas, não há solução.

Voltamos a questionar:- Mas qual característica das retas que nos permite afirmar isso?

Eles concluíram: - Pelo fato de as retas serem paralelas.

Figura 5 - Equação das retas paralelas e suas representações geométricas

Fonte: os autores

Agora foi a vez dos estudantes fazerem perguntas:

- Como podemos saber se as retas são paralelas antes de plotar no gráfico?

Após algumas conversar eles mesmos chegaram a conclusão que: os coeficientes são numericamente iguais nas duas retas, no entanto, diferem-se nos termos independentes, localizados no lado direito da igualdade. Desta forma, a representação geométrica se faz por meio de retas paralelas.

Aplicadas as três tarefas, anunciaramos, formalmente, os três casos de solução de sistema de equações. Conforme descrevem Kolmann e Hill (2014, p. 29), "todo sistema de equações lineares tem ou nenhuma solução, ou exatamente uma, ou então uma infinidade de soluções". Segue-se dessa constatação que um sistema linear pode ser classificado em três tipos: sistema possível e determinado (SPD) e sistema possível e indeterminado (SPI) e sistema impossível (SI).

Considerações Finais

Desenvolver esse trabalho no Programa Residência Pedagógica nos oportunizou vivenciar a utilização de tecnologia na construção de conhecimento matemático não apenas para os estudantes do Ensino Médio, mas também nos fez refletir a respeito de diversos aspectos do conteúdo e da utilização de estratégias de condução de aula. Em relação ao conteúdo refletimos sobre a importância de trabalharmos com os estudantes várias formas de representação de um objeto matemático, esse processo pode dar mais oportunidade de aprendizagem, ponto mais importante do trabalho do professor.

Quanto a utilização do *software* GeoGebra, percebemos maior envolvimento dos estudantes, tentando compreender como inserir dados, plotar gráficos e o que mais chamou a atenção foi o empenho em fazer as associações com as outras formas de encontrar solução para um sistema de equações.

Compreendemos que essa foi uma atividade simples, porém esperamos que possamos continuar investindo em aprender para realizarmos cada vez mais, com sucesso, nossa tarefa de ser professor de matemática.

Referências Bibliográficas

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2018.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano**: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Trad. Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

KOLMANN, Bernard; HILL, David R. Introdução à álgebra linear: com aplicações. Trad. de Alessandra Bosquilha. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014.

PETLA, Relelino José; ROLKOWSKI, Emerson. GeoGebra – **Possibilidades para o ensino de matemática**. Natal: UFRN, 2008.

PONTE, J. P.; OLIVEIRA, H.; CUNHA, M. H.; SEGURADO, M. I. **Histórias de Investigações Matemáticas**. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1998.

PONTE, J. P. d.; BROCARDO, J. OLIVEIRA, H. **Investigação matemática na sala de aula.** Belo Horizonte, Autêntica, 2006.

ROCHA, A.; PONTE, J. P. da. Aprender matemática investigando. **Zetetike**, Campinas, SP, v. 14, n. 2, p. 29–54, 2009.