

LEI DO RESFRIAMENTO DE NEWTON: UMA ANÁLISE SOBRE AS AÇÕES DO PROFESSOR

Tais Mara dos Santos
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR – Londrina)
taissantos@alunos.utfpr.edu.br

Mariana Martini Rodrigues
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR – Londrina)
marianamartini@alunos.utfpr.edu.br

Henrique Rizek Elias
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR – Londrina)
henriqueelias@utfpr.edu.br

Resumo

Este artigo tem por objetivo identificar, categorizar e analisar as ações do professor durante o desenvolvimento de uma tarefa matemática desenvolvida na disciplina Equações Diferenciais Ordinárias em uma turma de Engenharia da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Para as ações do professor que apoiam o raciocínio matemático, foram utilizadas as seguintes categorias *a priori*: Convidar, Guiar/Apoiar, Informar/Sugerir e Desafiar. O tópico escolhido para a pesquisa foi equações diferenciais de primeira ordem e o modelo matemático abordado foi a Lei do Resfriamento de Newton. Os dados foram produzidos ao longo de seis aulas, de 50 minutos cada, porém, neste artigo, a análise ficou restrita somente às duas últimas aulas, pois foi quando os grupos mais utilizaram do *GeoGebra* como ferramenta para auxiliar o desenvolvimento da tarefa. Das análises, percebemos que prevaleceu a ação de Guiar/Apoiar, seguida pela ação de Informar/Sugerir. Foi possível perceber que as ações do professor apoiaram o raciocínio matemático dos alunos, permitindo que esses deixassem uma conjectura não válida para a solução da equação diferencial ordinárias e, com o auxílio do *GeoGebra*, elaborassem uma conjectura válida e chegassem a diferentes estratégias (geométrica e algébrica) para justificar a resposta dada.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Ordinárias. *GeoGebra*. Engenharia.

Introdução

O trabalho do professor em sala de aula é fundamental para a aprendizagem matemática dos alunos. Pesquisas como Ponte e Quaresma (2016) e Araman, Serrazina e Ponte (2019) indicam o “potencial que as ações docentes podem ter no desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos” (ARAMAN; SERRAZINA; PONTE, 2019, p. 488). Essa importância das ações do professor se dá não apenas no ensino de Matemática na Educação Básica, mas, também, no Ensino Superior.

Em um levantamento bibliográfico realizado por Santos e Elias (2023, no prelo), cujo objetivo foi levantar e analisar trabalhos (artigos, dissertações e teses) que investigaram o ensino e/ou a

aprendizagem de equações diferenciais ordinárias em cursos de Engenharia no Brasil, identificamos que nenhuma pesquisa levantada teve como foco as ações do professor que ensina esse tema em cursos de Engenharia. O levantamento considerou dissertações e teses, buscadas por meio do Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), e artigos, considerando periódicos Qualis A1 e A2 da área de Ensino (levando em consideração a classificação do Quadriênio 2017-2020). A partir dos filtros estabelecidos, foram encontradas 12 pesquisas (seis dissertações, três teses e três artigos). Das análises empreendidas, foi constatado que todas as pesquisas possuem uma parte prática, isto é, todas elas desenvolveram uma sequência de atividades em turmas (regulares ou não) de Engenharia, mostrando uma característica intervencionista dessas investigações no Ensino Superior, sendo a Modelagem Matemática a abordagem de ensino mais utilizada nas pesquisas. No entanto, nenhuma foca as ações do professor.

Diante desse cenário, estamos desenvolvendo pesquisas¹ a respeito das ações do professor que apoiam o raciocínio matemático dos alunos da disciplina Equações Diferenciais Ordinárias para os cursos de Engenharia Química e Engenharia Ambiental da Universidade Tecnológica Federal do Paraná *campus* Londrina. O presente artigo é uma parte dessas pesquisas e tem como objetivo identificar, categorizar e analisar as ações do professor durante o desenvolvimento de uma tarefa matemática nas aulas da disciplina Equações Diferenciais Ordinárias.

As ações do professor que apoiam o raciocínio matemático dos alunos

Mata-Pereira e Ponte (2018, p. 782) afirmam que “raciocinar matematicamente consiste em fazer inferências justificadas, ou seja, utilizar informação matemática já conhecida para obter, justificadamente, novas conclusões”. De acordo com Araman, Serrazina e Ponte (2019), Lannin *et al.* (2011) consideram que o raciocínio matemático envolve vários processos interrelacionados, como conjecturar, generalizar, investigar o porquê, justificar e refutar.

Temos, então, que o desenvolvimento do raciocínio matemático ocorre a partir de conhecimentos prévios dos alunos e, por meio de alguns processos, esses são capazes de produzir novos conhecimentos. Dessa forma, espera-se que os alunos vivenciem experiências matemáticas que envolvem diferentes processos de raciocínio matemático (ARAMAN; SERRAZINA; PONTE, 2019). Para tanto, “os professores devem possibilitar-lhes ambientes de aprendizagem desafiadores, em uma

¹ Trata-se de duas pesquisas, uma de mestrado e outra de iniciação científica. A primeira autora é estudante do curso de Mestrado Profissional no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGMAT) da UTFPR *multicampi* Cornélio Procópio e Londrina. A segunda autora é estudante do curso de Engenharia Química pela UTFPR e desenvolve a iniciação científica. O terceiro autor é orientador de ambas as estudantes.

perspectiva diferente da usual, na qual resolvem exercícios usando procedimentos bem conhecidos” (ARAMAN; SERRAZINA; PONTE, 2019, p. 469). Para desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula, é necessário selecionar tarefas que sejam desafiadoras aos alunos.

Segundo Ponte (2014), “[...] as tarefas são ferramentas de mediação fundamentais no ensino e na aprendizagem da Matemática” (p. 16) e “[...] são usualmente (mas não necessariamente) propostas pelo professor, mas, uma vez propostas, têm de ser interpretadas pelo aluno e podem dar origem a atividades muito diversas (ou a nenhuma atividade)” (p. 15). Mata-Pereira e Ponte (2018, p. 783) destacam que “no ensino da Matemática e, particularmente, para o desenvolvimento do raciocínio matemático, as tarefas propostas constituem um dos aspectos centrais para o sucesso dos alunos”.

Uma tarefa, dependendo do ambiente de aprendizagem estabelecido em sala de aula, pode oferecer aos alunos diferentes atividades. Por este motivo, o professor tem um papel importante nesse desenvolvimento, pois, além de escolher uma boa tarefa, deve conduzir a aula com questionamentos que incentivem seus alunos e proporcione discussões matemáticas produtivas.

Araman, Serrazina e Ponte (2019) elaboraram um quadro de análise das ações do professor que apoiam o raciocínio matemático dos estudantes, conforme Figura 1. Neste quadro, os autores apresentam as categorias de ações e como elas podem ser executadas pelo professor durante o desenvolvimento da tarefa.

Figura 1: Quadro de análise das ações do professor que apoiam o raciocínio matemático.

C A T E G O R I A S	Convidar	<ul style="list-style-type: none"> - Solicita respostas para questões pontuais. - Solicita relatos de como os alunos fizeram. 	A Ç Õ E S
	Guiar/Apoiar	<ul style="list-style-type: none"> - Fornece pistas aos alunos. - Incentiva a explicação. - Conduz o pensamento do aluno. - Focaliza o pensamento do aluno para fatos importantes. - Encoraja os alunos a (re)dizerem suas respostas. - Encoraja os alunos a (re)elaborarem suas respostas. 	
	Informar/Sugerir	<ul style="list-style-type: none"> - Valida respostas corretas fornecidas pelos alunos. - Corrige respostas incorretas fornecidas pelos alunos. - (Re)elabora respostas fornecidas pelos alunos. - Fornece informações e explicações. - Incentiva e fornece múltiplas estratégias de resolução. 	
	Desafiar	<ul style="list-style-type: none"> - Solicita que os alunos apresentem razões (justificativas). - Propõe desafios. - Encoraja a avaliação. - Encoraja a reflexão. - Pressiona para a precisão. - Pressiona para a generalização. 	

Fonte: Araman, Serrazina e Ponte (2019 p. 476).

De acordo com Araman, Serrazina e Ponte (2019), a categoria *Convidar* envolve as ações do professor que solicitam informações dos alunos a respeito do que fizeram, tendo como objeto observar como os alunos estão pensando e qual a compreensão estão tendo sobre aquele tema. A categoria *Guiar/Apoiar* envolve as ações “em que o professor, a partir de perguntas ou explicações, conduz o pensamento do aluno para uma determinada situação ou focaliza fatos importantes ou ainda quando o professor fornece pistas aos alunos e os encoraja a pensarem sobre suas respostas” (ARAMAN; SERRAZINA; PONTE, 2019, p. 476). A categoria *Informar/Sugerir* abarca as ações pelas quais o professor valida ou corrige uma resposta dada pelos alunos, ou, ainda, quando fornece explicações ou informações e solicita ou apresenta outras estratégias de solução. A categoria *Desafiar* envolve “as ações nas quais o professor tenta colocar os alunos em situação desafiadora de modo que estes avancem em seu raciocínio matemático, procurando novas formas de representação, estabelecendo novas conexões, refletindo e avaliando a situação, generalizando e justificando” (ARAMAN; SERRAZINA; PONTE, 2019, p. 476).

Os autores destacam que, embora o quadro apresente as categorias em uma ordem, não existe obrigatoriedade de sequência entre elas, nem de hierarquização. Entretanto, há algumas ações apresentam maior potencial para apoiar o raciocínio (ARAMAN; SERRAZINA; PONTE, 2019).

Metodologia

Foi realizada uma pesquisa qualitativa na perspectiva de Esteban (2010). Para esse autor,

[...] a pesquisa qualitativa é uma atividade sistemática orientada à compreensão em profundidade de fenômenos educativos e sociais, à transformação de práticas e cenários socioeducativos, à tomada de decisões e também ao descobrimento e desenvolvimento de um corpo organizado de conhecimentos (ESTEBAN, 2010, p.127).

Os dados da pesquisa foram produzidos nos dias 12, 17 e 19 de abril de 2023, durante as aulas da disciplina Equações Diferenciais Ordinárias. A turma participante é composta por alunos dos cursos de Engenharia Química e Engenharia Ambiental da UTFPR de Londrina². Foi trabalhada com a turma uma tarefa que envolveu o tópico equações diferenciais de primeira ordem e o modelo matemático abordado foi a Lei do resfriamento de Newton. A tarefa matemática em questão envolveu a realização de medições de temperatura da água, a elaboração de um modelo matemático utilizando

² Essa pesquisa teve aprovação do Comitê de Ética em Pesquisas envolvendo Seres Humanos (CEP – UTFPR) sob o número CAAE: 65033822.6.0000.5547.

uma equação diferencial ordinária e a análise do modelo. Cada uma dessas etapas está descrita na sequência.

No primeiro dia (duas aulas de 50 minutos cada), os alunos realizaram medições das temperaturas da água (quente ou fria) deixada em temperatura ambiente por cerca de 100 minutos e registraram esses valores. Para iniciar, o professor explicou como seria a dinâmica da aula e separou os alunos em seis grupos (foram cinco grupos com seis alunos e um grupo com cinco alunos). Colocou um gravador de áudio na mesa de cada grupo e permaneceu com um gravador consigo, para capturar todos os diálogos entre ele e os alunos. Em seguida, entregou aos grupos os materiais necessários para a coleta das informações: cada grupo recebeu um recipiente com água (de acordo com o Quadro 1) juntamente com uma folha para anotarem as medições. O professor orientou os alunos a anotarem a temperatura ambiente naquele exato momento (início da aula), que era de 26,4 °C, e a realizarem a primeira medição da temperatura da água. A partir de então, cada grupo mediria a temperatura da água a cada 10 minutos.

Quadro 1: Recipiente e temperatura da água referente a cada Grupo

Grupo	Recipiente	Água
1	Caneca de Plástico	Quente
2	Caneca <i>Stanley</i>	Gelada
3	Caneca de Plástico	Gelada
4	Copo de vidro	Gelada
5	Caneca de alumínio	Quente
6	Garrafa Plástica	Gelada

Fonte: os autores

A coleta ocorreu da seguinte forma: os alunos colocavam o termômetro culinário dentro do recipiente com água, esperavam um pouco (até a medida do termômetro estabilizar) e em seguida anotavam na folha qual era o horário e a temperatura do líquido naquele momento. O professor e a pesquisadora foram auxiliando os alunos durante a coleta de dados e, por meio de perguntas realizadas pelo professor, os alunos começaram a levantar conjecturas sobre a situação-problema. Como exemplo, a Figura 2 mostra a coleta de informações feita pelo Grupo 1 e pelo Grupo 4 ao final do primeiro dia de aula:

Figura 2: Informações registradas pelos alunos do Grupo 1 e do Grupo 4 no primeiro dia

Grupo 1 (Caneca de Plástico)		Grupo 4 (Copo de vidro)	
Horário	Temperatura da água Termômetro Culinário	Horário	Temperatura da água Termômetro Culinário
16h10	74,6° C	16h06	3,3° C
16h19	61° C	16h18	8,9° C
16h29	53,8° C	16h28	12,1° C
16h39	48,1° C	16h38	15° C
16h50	43,6° C	16h49	17,3° C
17h	40,2° C	17h	19,2° C
17h10	38,1° C	17h09	20,1° C
17h21	36,3° C	17h19	20,9° C

Fonte: os autores

No segundo dia (duas aulas de 50 minutos cada), os alunos fizeram a análise das informações coletadas. O professor pediu que os alunos se organizassem nos mesmos grupos da aula anterior. Para essa aula, o professor levou, em folhas separadas, os dados coletados pelos grupos 1 e 4 no primeiro dia (Figura 2) e entregou as folhas para cada grupo. Todos os seis grupos analisaram e geraram um modelo matemático (utilizando uma equação diferencial ordinária) a partir das observações e análises dos dados obtidos pelos grupos 1 e 4. A orientação contida nas folhas entregues pelo professor era: “Encontrar um modelo matemático que permita encontrar a temperatura da água em qualquer instante t ”. Caso desejassem, os alunos poderiam utilizar o software *GeoGebra* para trabalhar com os dados e identificar o comportamento do gráfico da função que descreveria a situação.

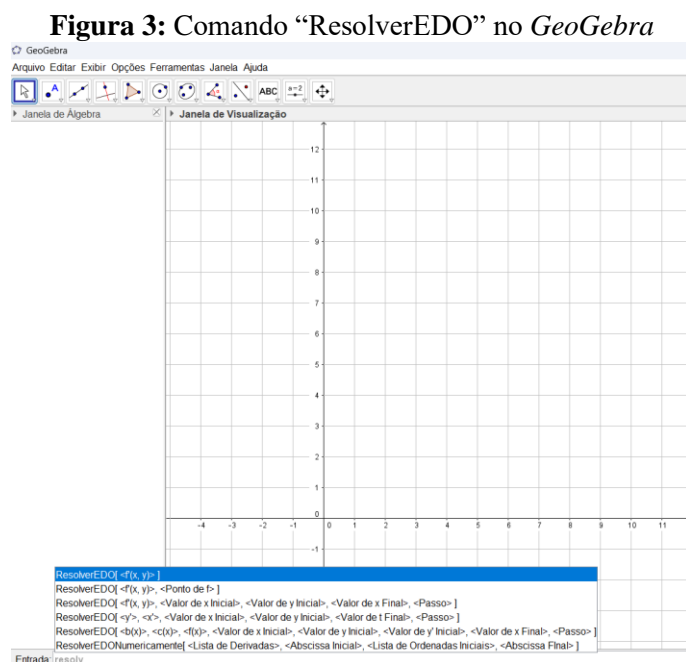
Durante a aula, o professor ficou circulando entre os grupos com o objetivo de dialogar com os alunos e conduzi-los a chegarem a um modelo. O professor visava estimular os alunos a compreenderem que, na situação proposta, a taxa de variação da temperatura é proporcional à diferença entre a temperatura T e a temperatura ambiente T_a , isto é,

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a) \quad (\text{onde } k > 0)$$

No terceiro dia (duas aulas de 50 minutos cada), o professor iniciou a aula convidando os alunos a apresentarem suas resoluções para a toda a turma. Após os seis grupos apresentarem as equações diferenciais ordinárias que construíram, o professor orientou que deveriam, então, resolver a equação e validar o modelo construído. Para tanto, os alunos poderiam voltar aos dados coletados pelos seus próprios grupos no primeiro dia. Assim como no segundo dia, os alunos poderiam utilizar livremente o software *GeoGebra*. Não houve nenhuma orientação específica, por parte do professor,

quanto ao uso do *GeoGebra*. Os alunos poderiam utilizar da maneira como quisessem, fazendo uso dos comandos que soubessem³ utilizar.

Ao final do terceiro dia, após os alunos analisarem e resolverem a equação diferencial ordinária considerando diferentes conjuntos de dados (do Grupo 1, do Grupo 4 ou do próprio grupo), o professor apresentou aos alunos o comando “Resolver EDO” (conforme Figura 3), até então desconhecido pelos alunos.



Fonte: os autores

Para este artigo, realizamos a análise referente a um dos grupos, o Grupo 1, enquanto interagía com o professor. Para tanto, utilizamos somente o áudio do gravador que permanecia com o professor enquanto caminhava entre os alunos. Visando manter o anonimato dos alunos participantes, utilizamos nomes fictícios.

Restringimos a análise somente ao terceiro dia, pois foi quando os grupos mais utilizaram do *GeoGebra* para desenvolver a tarefa. Utilizamos as categorias de ações do professor, segundo Araman, Serrazina e Ponte (2019), para realizar as análises. Após cada trecho de fala do professor da turma, indicamos a categoria de ação do professor de acordo com os autores.

Análises

³ Foi a primeira vez que o professor desenvolveu uma tarefa em que os alunos utilizaram o *GeoGebra* em sala de aula na disciplina. O conhecimento que os estudantes tinham sobre o *software* veio de momentos anteriores no curso. Até então, estudantes não conheciam o comando “ResolverEDO” no *GeoGebra*, que foi apresentado pelo professor.

O professor inicia o terceiro dia convidando cada grupo a comentar o modelo matemático elaborado na aula anterior.

[1] Professor: *Hoje a gente vai finalizar essa atividade. A ideia vai ser discutir modelos que alguns já chegaram, alguns chegaram próximo, né? Então a gente vai finalizar esse modelo e depois analisar esse modelo matemático. Analisar no sentido de que eu vou devolver para vocês a coleta de dados que os grupos fizeram no primeiro dia e a gente vai analisar isso, e nesse momento de análise o GeoGebra vai ajudar em alguns aspectos. Nesse primeiro momento eu gostaria de contar com a ajuda de vocês, quem se dispôr, a comentar pra todo mundo, pra toda a sala do seu modelo, como chegou no seu modelo e explicar brevemente sobre isso. Alguém se dispõe? Algum grupo? Uma pessoa do grupo?* [Convidar]

A partir desse momento, os grupos começam a se manifestar. O primeiro grupo a se manifestar relatou que o modelo construído foi $\frac{dC}{dt} = k(26,4 - C)$, onde k é a constante de proporcionalidade e C a temperatura em função do tempo t . O Grupo 1 foi o segundo grupo a se manifestar.

[2] Lucas: *O nosso ficou parecido.*

[3] Professor: *Parecido?* [guiar - Encoraja os alunos e redizerem suas respostas]

[4] Lucas: *É, a única coisa é que o nosso ficou a temperatura menos o 26,4.*

[5] Professor: *Tá, então, que letra que vocês usaram?*

[6] Lucas: *A gente usou A.*

[7] Professor: *A. A é a temperatura, né?* [guiar – incentiva explicação]

[8] Lucas: *Aí ficou $\frac{dA}{dt}$ igual a A de t menos 26,4. Aí tudo isso vezes k.*

[9] Professor: *Tudo isso vezes k?* [guiar – incentiva explicação]

[10] Lucas: *Isso*

[11] Professor: *Aqui, esse A de t, nesse caso aqui [comparando com a resolução do grupo anterior] seria C de t?* [guiar – incentiva explicação]

[12] Lucas: *É, a temperatura em função de t.*

O modelo construído pelo Grupo 1 foi $\frac{dA}{dt} = k(A(t) - 26,4)$. Para além do uso das letras C e A, o grupo percebe que há uma diferença nos modelos, como pode ser visto em [4]. O professor aguardou que os demais grupos apresentassem seus modelos para discutir com a turma toda sobre essa diferença.

[13] Professor: *O que muda nessas equações aí? Que diferença faz estar 26,4 menos T, ou C, ou A, e estar A menos 26,4? O que que muda essa ordem estar trocada?* [desafiar – encoraja avaliação]

[14] Alunos/Alunas: *O sinal de menos.*

[15] Professor: *O sinal de menos.* [informar – valida resposta] *E isso interfere em alguma coisa na análise?* [desafiar – solicita avaliação]

[16] Alunos/Alunas: *Na constante.*

[17] Professor: *O que na constante?* [desafiar – solicita reflexão]

[18] Alunos/Alunas: *No sinal da constante.*

[19] Professor: *No sinal da constante* [informar – valida resposta]. *Uma análise que a gente pode fazer a respeito desse sinal é: o que essa derivada, eu vi que muitos grupos fizeram no*

GeoGebra e jogaram os dados, pegaram os dados da planilha e jogaram pra ver o comportamento. O que essa derivada representa neste gráfico que vocês fizeram? [desafiar – encoraja avaliação]

[20] Alunos/Alunas: *A inclinação da reta tangente.*

No trecho acima, o professor desafia os alunos [13, 15, 17, 19] a refletirem a respeito da diferença entre escrever $\frac{dC}{dt} = k(26,4 - C)$ ou $\frac{dC}{dt} = k(C - 26,4)$, levando em consideração a interpretação geométrica da derivada como o coeficiente angular da reta tangente à curva em um dado ponto. Essa discussão se prolonga e o professor conduz a análise tanto para o caso da água gelada que, com o passar do tempo, vai aquecendo, como para o caso da água quente que vai esfriando. Por limitações de página, passamos para outro momento em que o professor conversa especificamente com o Grupo 1 sobre a resolução da equação $\frac{dA}{dt} = -k(A(t) - 26,4)$. No trecho abaixo, o grupo está buscando encontrar o valor de k utilizando os valores de t e $A(t)$ dados na Figura 2.

[21] Professor: *Como é que vocês estão?* [convidar – solicita relato]

[22] Lucas: *professor, a gente...cada ponto vai passar diferente* [no gráfico]?

[23] Professor: *por que que isso acontece?* [desafiar – encoraja avaliação]

[24] Lucas: *é que a gente tentou fazer com o outro ponto, e deu quase a metade desse, professor, ficou muito estranho.*

[25] Professor: *pra achar o valor do k ?* [guiar – incentiva explicação]

[26] Lucas: *é, ficou muito discrepante.*

[27] Professor: *como assim? Vocês pegaram, primeiro...* [guiar – incentiva explicação]

[28] Lucas: *isso, a gente fez com esse valor aqui de água quente, no tempo 9 deu 61 [61°C]. Aí deu esse k aqui. Só que a gente foi tentar fazer com outro valor, acho que nesse 19 [t=19] e 53,8 [53,8°C], deu metade desse quase.*

[29] Daniela: *deu 0,17.*

[30] Lucas: *é, 0,17... menos 0,17*

[31] Professor: *menos 0,17. Ahn, vocês estão sem computador, eu vou pegar meu computador ali e vou pegar o GeoGebra, porque eu acho que ele vai ajudar vocês a pensarem isso* [informar – fornece múltiplas estratégias de resolução]

Pelo trecho, percebemos que os alunos estavam com dificuldades para definir qual o valor que k poderia assumir. Ao chegar ao grupo, o professor convida [21] os alunos a explicarem como estavam desenvolvendo a tarefa. Em seguida, para tentar compreender seus raciocínios, o professor os desafia [23] e os guia [25 e 27] e, por fim, informa [31] que o *GeoGebra* poderia auxiliá-los a pensarem sobre as dúvidas.

Em um momento posterior, o professor retorna ao Grupo 1 para verificar se o *GeoGebra* tinha auxiliado no desenvolvimento da tarefa e no raciocínio dos estudantes. Como fica evidente no trecho a seguir, os alunos utilizaram o comando “controle deslizante” para dar continuidade na tentativa de definir um valor adequado para a constante de proporcionalidade k .

[32] Professor: *como é que vocês fizeram isso aí?* [convidar – solicita relato]

- [33] Lucas: *a gente foi colocar a função [no GeoGebra]. Aí a gente foi testando os valores [de k], só que nenhum valor está dando próximo.*
- [34] Professor: *mas cadê o k aí?* [guiar – incentiva explicação]
- [35] Daniela: *o k é o que está substituindo.*
- [36] Lucas: *ele dá pra mexer [referindo-se ao comando “controle deslizante” do GeoGebra]*
- [37] Professor: *vocês não estão colocando a função errada, não?* [desafiar – encoraja avaliação]
- [38] Lucas: *é assim, não é, oh? $A(t)$ é igual a e elevado a menos kx, porque o t está no eixo x, mais 26,4. Tá certo, não tá?*
- [39] Professor: *qual é o valor de k que deu na conta de vocês?* [guiar – incentiva explicação]
- [40] Lucas e Daniela: *tem vários, várias possibilidades.*
- [41] Professor: *então, mas aí, então tem alguma coisa estranha. Como é que vocês acharam o valor de C [constante]?* [desafiar – encoraja avaliação]
- [42] Lucas: *o que é C mesmo?*
- [43] Professor: *Quando vocês integraram ali, não surgiu uma constante?* [desafiar – encoraja a avaliação]
- [44] Lucas: *não.*
- [45] Professor: *Aqui está errado, quando vocês integram de cada lado, a integral disso surge uma constante C.* [informar – corrige resposta incorreta]
- [46] Lucas: *verdade, a gente esqueceu!*
- [47] Professor: *então, é, essa constante C surge da resolução da EDO* [informar – fornece informação]
- [48] Lucas: *a gente esqueceu completamente.*
- [49] Professor: *aí essa constante C, vocês vão precisar encontrar.* [guiar – conduz o pensamento do aluno.]
- [50] Lucas: *pegar um ponto.*
- [51] Professor: *pegar um ponto, coloca a constante C aí que está errado.* [guiar – encoraja reelaborar resposta]

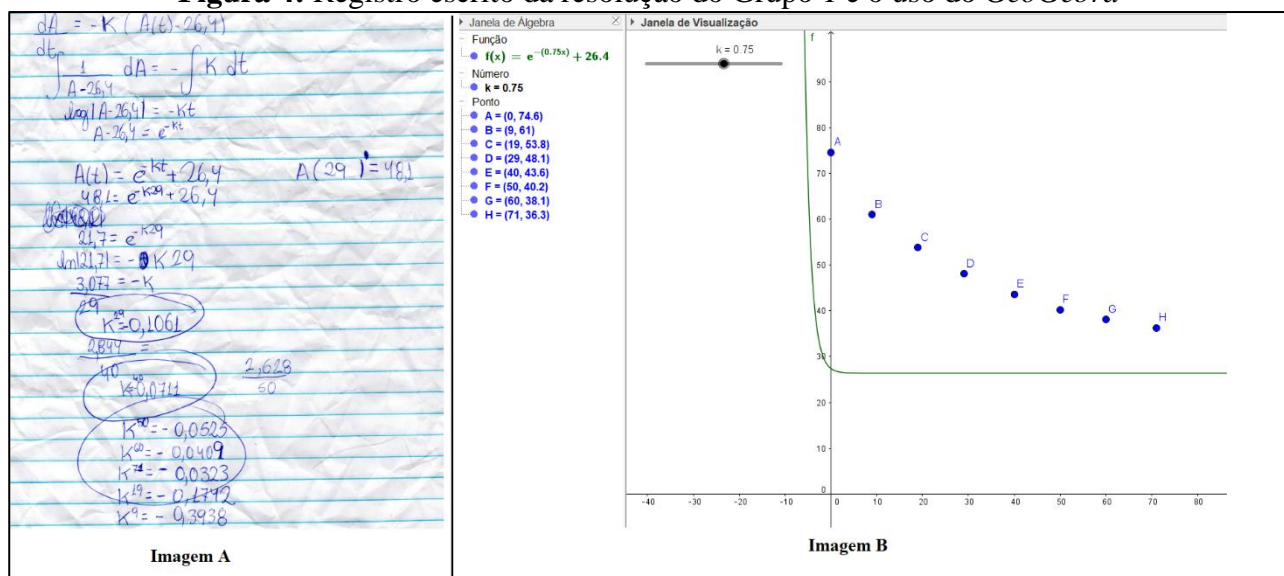
Ao convidar os alunos [32] a manifestarem seus raciocínios, o professor pode perceber que havia um erro na resolução da equação diferencial ordinária, uma vez que os alunos não colocaram a constante de integração que surge ao resolver uma integral indefinida. Em [45] e [47], o professor informa o erro aos alunos, que percebem o equívoco [46 e 48] e logo apresentam uma conjectura sobre como encontrar o valor da constante C, como mencionado por Lucas em [50].

No trecho anterior, fica evidente que o *GeoGebra*, por meio do comando “controle deslizante”, teve o papel de agilizar o procedimento que os alunos já vinham fazendo em [27], só que utilizando folha e caneta. Tanto pelas contas feitas no papel como pelo gráfico feito no *GeoGebra*, os alunos perceberam que a curva não estava coincidindo com os dados da Figura 2.

A Figura 4 traz as duas resoluções feitas pelo Grupo 1. A Imagem A ilustra a maneira como os alunos resolveram a equação diferencial ordinária no papel, calculando diversas possibilidades para a constante de proporcionalidade k . A Imagem B ilustra o uso do *GeoGebra* pelos alunos. Em

ambos os casos, os alunos não consideraram a constante de integração C , que surge de uma integral indefinida.

Figura 4: Registro escrito da resolução do Grupo 1 e o uso do *GeoGebra*



Fonte: os autores

Após guiar os alunos do Grupo 1 [49 e 51], o professor circulou entre os demais grupos. Algum tempo depois, retornou ao Grupo 1 para ver como estava o andamento.

[52] Lucas: *foi a constante mesmo, professor, que a gente esqueceu. Agora deu certo.*

[53] Professor: *a solução escrita, assim, a completa. É isso aqui? Aqui está o quê? Mas, o k... você já achou o valor da solução com o k?* [convidar – solicita resposta a questões pontuais]

[54] Lucas: *a gente foi chutando* [valores para o k].

[55] Professor: *vocês pegaram o controle deslizante e foram ajustando até chegar próximo* [a uma função que se adequasse aos dados], *é uma ideia* [informar – valida resposta correta].

[56] Professor: *Tem um jeito que a gente poderia usar algebricamente pra achar também o valor de K. Como?* [informar - incentiva múltiplas estratégias de resolução].

[57] Mário: *isola na EDO?*

[58] Professor: *Como que vocês acharam o valor de C?* [guiar – incentiva explicação]

[59] Lucas: *ah, substituindo por um valor.*

[60] Professor: *qual valor?* [guiar – incentiva explicação]

[61] Lucas: *substituí por um valor da temperatura, neh? Temperatura por tempo.*

[62] Professor: *vocês substituíram qual valor pra achar o C?* [guiar – incentiva explicação]

[63] Lucas: *deixa eu ver. Aqui olha, 9 e 61* [$t=9$ e $A(9)=61$].

[64] Professor: *pra achar o calor de C?* [guiar – focalizar pensamento]

[65] Lucas: *isso. Que no 9 minutos tinha dado 61, tava 61, neh, que era água quente*

[66] Professor: *mas e aí? Como é que vocês...* [guiar – incentiva explicação]

[67] Lucas: *aí eu substituí o 61 mais. Vê se está certo, professor.*

[68] Professor: *deixa eu ver. 61 igual a e elevado a menos 9k Ah, e aí vocês acharam o C em função do k?* [guiar – incentiva explicação]

[69] Lucas: *isso, aí eu substituí esse C aqui. Aí o k, esse 9k eu já somei aqui, porque está multiplicando, neh!*

[70] Professor: *E colocou o k em evidência [guiar – incentiva explicação]*

[71] Lucas: *aham, é que ficou feinho, mas aí eu...*

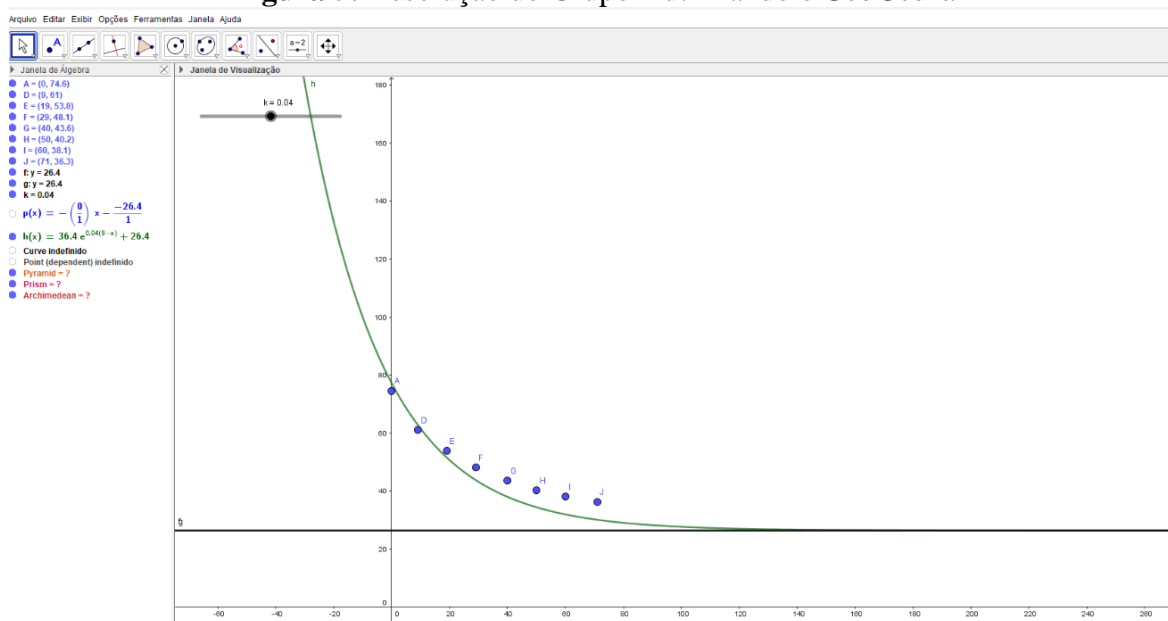
[72] Professor: *entendi. Aí, essa é uma forma de fazer [informar – valida resposta certa]. Aí depois vocês chutaram o valor de k a partir do controle deslizante [guiar – incentiva explicação].*

[73] Lucas: *isso.*

[74] Professor: *é um jeito interessante de fazer, vocês chegaram em um modelo [informar – valida resposta correta].*

Após as ações do professor, o Grupo 1 avançou na resolução da equação diferencial, incluindo a constante de integração C e encontrando seu valor, substituindo $t = 9$ e $A(9) = 61$ na equação $A(t) = Ce^{-kt} + 26,4$, como mencionado em [63], [68] e [69]. Os alunos chegaram em $C = 34,6e^{9k}$, o que resultou na função $A(t) = 34,6e^{-(t+9)k} + 26,4$. Para atribuir um valor para k , os alunos do Grupo 1 permaneceram com a mesma estratégia inicial, mas agora eles conseguiram, por meio do “controle deslizante” do *GeoGebra*, chegar a uma curva que se aproximasse dos pontos obtidos a partir dos dados. Como é possível observar na Figura 5, ao colocarem o $k = 0.04$ no “controle deslizante”, os alunos chegaram a uma curva mais próxima do esperado, dada pela função $h(x) = 36.4e^{0.04(9-x)} + 26.4$ (h e x são as letras que aparecem na Figura 5).

Figura 5: Resolução do Grupo 1 utilizando o *GeoGebra*



Fonte: os autores

O professor valida a resposta dos alunos [72 e 74], mas os informa a respeito de outra forma de resolver, conforme trecho abaixo.

[75] Professor: *Uma maneira de pensar é, aqui, esse e elevado a C vocês podem chamar de constante, beleza. Se vocês usam a condição inicial...Quando eu comecei a marcar, a temperatura era quanto?* [convidar – solicita resposta pontual]

[76] Lucas: 74

[77] Professor: *74,6. Então, substituindo o zero e a temperatura por 74,6, o que vai acontecer quando o t for zero aqui?* [desafiar – encoraja avaliação]

[78] Lucas: *ah, o e vai dar 1.*

[79] Professor: *o e vai ficar elevado a zero, que é 1. Aí 1 vezes uma constante, que eu quero descobrir qual que é, mais 26,4 igual a esse valor* [informar – fornece explicação]

[80] Jairo: *aí você deixa em função de k.*

[81] Professor: *aí você acha o valor de C* [guiar – conduz pensamento]

[82] Lucas: *é que a gente tinha esquecido do C aquela hora que você veio aqui. A gente tinha feito sem esse e elevado a C*

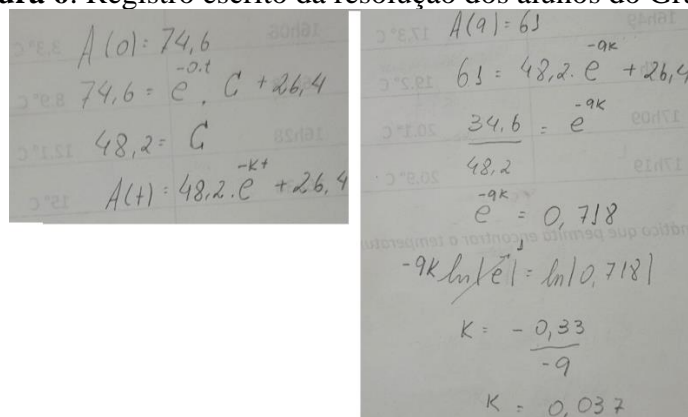
[83] Professor: *ahan, isso, no primeiro momento vocês tinham esquecido C. Aí, usando a condição inicial, vocês conseguem achar o valor de C. Depois de achar o valor de C, pega um outro ponto e acha o valor de k.* [guiar – conduz pensamento]

[84] Mário: *aí faz todos eles e vê qual ponto fica mais próximo?*

[85] Professor: *é, você pode... escolhe um ponto, não precisa fazer em todos. A condição inicial é interessante pra o primeiro caso, pelo fato de t ser zero, vai ficar e elevado a zero e vocês vão conseguir achar a constante C facilmente. Mas aí, pra achar o valor de K, você substitui outro ponto* [informar – fornece explicação/ guiar – conduz pensamento]. *Aí vocês vão conseguir achar uma expressão pra solução da EDO sem precisar fazer esse procedimento, mas a saída de vocês foi boa, com o GeoGebra* [informar – múltiplas estratégias].

No trecho acima, principalmente por meio das ações de guiar e informar, o professor conduz o raciocínio dos alunos a uma forma diferente daquela como vinham fazendo. Em [85], ao mesmo tempo em que informa e guia os alunos para outra estratégia possível, o professor valida a maneira como o grupo vinha fazendo utilizando o *GeoGebra*. A Figura 6 apresenta o registro escrito da resolução dos alunos após a intervenção do professor.

Figura 6: Registro escrito da resolução dos alunos do Grupo 1



$$\begin{aligned}
 &A(0) = 74,6 \\
 &74,6 = e^{-0 \cdot t} \cdot C + 26,4 \\
 &48,2 = C \\
 &A(t) = 48,2 \cdot e^{-kt} + 26,4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &A(9) = 63 \\
 &63 = 48,2 \cdot e^{-9k} + 26,4 \\
 &34,6 = e^{-9k} \\
 &48,2 \\
 &e^{-9k} = 0,718 \\
 &-9k \ln|e| = \ln|0,718| \\
 &k = \frac{-0,33}{-9} \\
 &k = 0,037
 \end{aligned}$$

Fonte: os autores

A Figura 6 mostra que os alunos chegaram no valor (aproximado) de $k = 0,037$. Dessa forma, os alunos puderam comparar esse valor de k com aquele encontrado utilizando o “controle deslizante” do *GeoGebra*, validando sua resposta.

Como dissemos, a pesquisa está em andamento e ainda é preciso aprofundar a discussão sobre os processos de raciocínio matemático dos alunos. Ainda que de forma inicial, foi possível perceber, pelos dados apresentados, que as ações do professor apoiaram o raciocínio matemático dos alunos. Por exemplo, quando o professor informa os alunos (em [31]) sobre o uso do *GeoGebra*, permite que eles elaborem conjecturas a respeito da solução, como mostra a Figura 4. Mas, ao mesmo tempo, por meio do *GeoGebra*, os alunos puderam refutar a solução encontrada, como pode ser visto em [33]. Em seguida, quando o professor desafia os alunos (em [43]) e os informa, corrigindo uma resposta incorreta (em [45]), o grupo revê sua solução e apresenta uma nova conjectura. Naquele momento, o *GeoGebra*, principalmente por meio da ferramenta “controle deslizante”, permitiu que os estudantes justificassem sua resposta (Figura 5) e o professor a validasse (em [72] e [74]). Por fim, o professor informa os alunos (em [56]), incentivando-os a pensarem em uma resolução algébrica para confirmar o que foi encontrado por meio do *GeoGebra*, permitindo que os alunos justifiquem de uma outra maneira as suas conclusões (Figura 6).

Considerações Finais

O objetivo do artigo foi categorizar e analisar as ações do professor durante o desenvolvimento de uma tarefa matemática nas aulas da disciplina Equações Diferenciais Ordinárias. Das análises dos dados, identificamos que as categorias de ações do professor ocorreram na seguinte quantidade: convidar (5), Guiar/Apoiar (21), Informar/sugerir (12), Desafiar (9). É notável que prevaleceu a categoria de Guiar/Apoiar, seguida pela categoria de Informar/Sugerir e que a categoria Desafiar não foi muito explorada e ficou, em certa medida, concentrada no trecho [13] ao [20], quando o professor discutia com toda a sala. Embora as ações de Desafiar sejam as que possuem maior potencial para promover o raciocínio dos alunos, as ações de Guiar/apoiar e de Informar dão suporte para as ações de Desafiar (ARAMAN; SERRAZINA; PONTE, 2019). Assim, se, por um lado, a maior ocorrência dessas ações (Guiar/Apoiar e de Informar/Sugerir) suportam outras ações, por outro, é preciso que o professor busque desafiar mais seus alunos em sala de aula para promover o raciocínio matemático.

Foi possível perceber que as ações do professor apoiaram o raciocínio matemático dos alunos, permitindo que esses deixassem uma conjectura não válida para a solução da equação diferencial

ordinária e, com o auxílio do *GeoGebra*, elaborassem uma conjectura válida e chegassem a diferentes estratégias (geométrica e algébrica) para justificar a resposta dada

Concluimos que a tarefa foi proposta e desenvolvida em sala de aula proporcionou aos alunos diversas atividades, desde a coleta de dados até a exploração no software *GeoGebra* e o professor teve um papel fundamental neste desenvolvimento.

Como continuidade da pesquisa (de mestrado e de iniciação científica), pretendemos aprofundar as análises do Grupo 1 no terceiro dia de aula, mas, principalmente, analisar todo o processo que envolveu este grupo, isto é, desde o primeiro dia de aula (medições das temperaturas da água quente ou fria), passando pelo segundo dia (formulação do modelo matemático) e finalizando com o terceiro dia (resolução da equação diferencial ordinária e análise do modelo).

Referências

ARAMAN, E. M. D. O.; SERRAZINA, M. D. L.; DA PONTE, J. P. “Eu perguntei se o cinco não tem metade”: ações de uma professora dos primeiros anos que apoiam o raciocínio matemático. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 21, n. 2, p. 466-490, 2019.

ESTEBAN, M. P. S. **Pesquisa qualitativa em educação: fundamentos e tradições**. Porto Alegre: AMGH Editora Ltda, 2010.

MATA-PEREIRA, J.; PONTE, J. P. Promover o Raciocínio Matemático dos Alunos: uma investigação baseada em design. **Bolema**, Rio Claro, v. 32, n. 62, p. 781–801, 2018.

PONTE, J. P. Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In: PONTE, J. P. (Org.), **Práticas Profissionais dos Professores de Matemática**. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014, p. 13-27.

PONTE, J. P.; QUARESMA, M. Teachers’ professional practice conducting mathematical discussions. **Educational Studies in Mathematics**, n. 1, v. 93, p. 51-66, 2016.

SANTOS, T. M.; ELIAS, H. H. Equações Diferenciais Ordinárias em cursos de Engenharia: um levantamento bibliográfico. **ReBECCEM**, 2023, no prelo.