



A UTILIZAÇÃO DO JOGO TORRE DE HANÓI NA APRENDIZAGEM DE FUNÇÃO EXPONENCIAL E PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Anderson Kohut
Universidade Estadual do Centro – Oeste – UNICENTRO
kohutanderson@gmail.com

Sebastião Romero Franco
Universidade Estadual do Centro – Oeste – UNICENTRO
romero@unicentro.br

Renata Maria Schimitz
Universidade Estadual do Centro – Oeste – UNICENTRO
re.schimitz@gmail.com

Resumo: A presente pesquisa busca analisar a utilização do jogo Torre de Hanói no desenvolvimento de conteúdos matemáticos. Realizada com os acadêmicos do 1º ano do curso de matemática da UNICENTRO (*campus* Irati), aborda os conteúdos sobre função exponencial, progressão geométrica e suas aplicações. Dessa forma, pretende-se dar mais significado aos conteúdos que podem ser extraídos do jogo, assim como, proporcionar aos alunos uma forma lúdica e motivadora para o estudo dos mesmos, também motivá-los para que apliquem esse jogo em sala de aula quando forem professores. Este trabalho tem como fundamentação teórica os autores: POLYA (1978), DANTE (1998), GRANDO (1995), ANTUNES (2002), MOURA (2008), BRENELLI (2001), BORIN (1998) e D'AMBROSIO (2005). Analisando suas ideias, fica explícito que o jogo matemático é uma metodologia de ensino que facilita a aprendizagem e proporciona aos alunos a constatação, por meio de uma investigação matemática lúdica, de ideias fundamentais sobre os conteúdos a serem trabalhados. Após a aplicação do jogo foi possível constatar a assimilação dos conteúdos por parte dos alunos e que os mesmos gostaram dessa metodologia de ensino pelo fato de perceberem sua eficácia.
Palavras-chave: Conteúdos matemáticos. Investigação matemática.

INTRODUÇÃO

É frequente a constatação de que muitos alunos se sentem desmotivados para o estudo de matemática. Por isso, o desempenho dos alunos nessa disciplina muitas vezes é insatisfatório, e conseqüentemente, os índices de reprovação e evasão são muito significativos. Dessa forma, é preciso sempre buscar meios para que os alunos se sintam motivados a estudar matemática, utilizando metodologias diversificadas em busca de melhorar a forma da construção do conhecimento por parte dos alunos.

Uma das metodologias de ensino que pode ser utilizada pelos professores é a metodologia de resolução de problemas, tendo os jogos matemáticos como um de seus recursos. Segundo Polya (1978), para realizar a resolução de um problema matemático, o aluno deverá seguir algumas etapas:

1. Compreender o problema;
2. Elaborar um plano;
3. Executar o plano;
4. Fazer o retrospecto ou verificação.

Assim, os alunos, com a ajuda do professor, realizam um estudo investigativo sobre o problema matemático proposto, como forma de desafio para se chegar na solução. Nesse processo, os alunos constroem e aprimoram seus conhecimentos, pois através do raciocínio desenvolvido, buscam entender melhor a lógica de resolução que deve ser abordada para o problema.

Segundo Dante (1998), os objetivos da resolução de problemas são:

- Fazer o aluno pensar produtivamente;
- Desenvolver o raciocínio do aluno;
- Ensinar o aluno a enfrentar situações novas;
- Dar ao aluno a oportunidade de se envolver com as aplicações da matemática;
- Tornar as aulas de matemática mais interessantes e desafiadoras;
- Equipar o aluno com estratégias para resolver problemas;
- Dar uma boa base matemática às pessoas.

Conforme a citação do autor fica evidente que a resolução de problemas deve ser algo motivador para os alunos. Paralelo a essa metodologia, os jogos no ensino da matemática podem ser uma ferramenta capaz de auxiliar no desenvolvimento das habilidades, contribuindo para a aprendizagem do aluno. Ao praticar um jogo matemático o aluno estuda os conteúdos nele inseridos de uma forma lúdica e motivadora, sendo impulsionado pelas características desafiadora e instigante que os jogos têm (DANTE, 1998).

Segundo Grando (1995):

A ação no jogo, tanto quanto no problema, envolve um objetivo único que é vencer o jogo ou resolver o problema e, em ambos os casos, o indivíduo se sente desafiado e motivado a cumprir tal objetivo. Atingir o objetivo implica em dominar, em conhecer, em compreender todos os aspectos envolvidos na ação e, portanto, produzir conhecimento. (GRANDO, 1995, p. 77).

No momento em que os alunos praticam um jogo matemático, estão fazendo descobertas, e estas são conteúdos matemáticos ou estão relacionadas com os mesmos. O

professor somente irá ensinar as especificidades desses conteúdos, mas a essência dos mesmos eles encontram no jogo.

Tratando-se de jogos matemáticos, essa investigação é um dos meios para a construção do conhecimento, que consiste na busca de um caminho para fazer a resolução de determinado problema ou desafio matemático. Com isso, na investigação matemática o professor não transmite a forma de como fazer a resolução, apenas auxilia os alunos na busca pelas estratégias a serem utilizadas.

Nesse contexto, Antunes (2002) afirma que quando é feito o uso de jogos no ambiente escolar, é estimulado que o aluno faça uma busca por conhecimentos:

O jogo ajuda-o a construir novas descobertas, desenvolve e enriquece sua personalidade e simboliza um instrumento pedagógico que leva ao educador a condição de condutor, estimulador e avaliador da aprendizagem. (ANTUNES, 2002, p. 36).

Dessa forma, o objetivo geral dessa pesquisa é utilizar o jogo Torre de Hanói como um instrumento educativo e apresentar uma pesquisa sobre o ensino de função exponencial, progressão geométrica e suas aplicações, como para propor chaveamento de competições e formas de cortar papel otimizando as perdas, de modo lúdico e prático. Dessa forma, pretende-se também mostrar aos alunos e futuros professores que é possível estudar temas da matemática utilizando esse jogo, e que seu uso em sala de aula poderá ser uma opção metodológica muito produtiva.

TORRE DE HANÓI

O jogo Torre de Hanói é composto de uma base que contém três pinos e vários discos, sendo todos os discos de tamanhos diferentes e em ordem decrescente de tamanho, cujo maior disco encontra-se na base. O jogo consiste em transferir todos os discos que estão no primeiro pino, para qualquer um dos outros dois pinos, de modo que os discos também fiquem dispostos em ordem decrescente de tamanho, como mostra a Figura 1.



Figura 1 – Jogo Torre de Hanói
Fonte: sematifrnspp.blogspot.com

Sabe-se que esse jogo foi criado pelo matemático francês Edouard Anatole Lucas, no ano de 1883. Contudo existe uma lenda que se relaciona com sua criação, na qual o Deus Brahma, cultuado pela cultura hinduísta, havia colocado no templo de Benares, localizado na Índia, uma bandeja constituída de metal e que continha três pinos de diamantes e, no momento da criação do mundo, Brahma havia colocado sessenta e quatro discos com tamanhos diferentes em um dos pinos, sendo esses dispostos na ordem decrescente de tamanho.

Os sacerdotes incumbidos de cuidar desse templo receberam a seguinte missão: transferir os discos para um dos pinos vazios, fazendo isso sem sobrepor um disco maior em um menor.

Quando eles realizassem tal feito, eles e o templo virariam pó e o mundo acabaria. A bandeja com os pinos e os discos constituíam a chamada Torre de Brahma ou Quebra-Cabeça do Fim do Mundo (FERRERO, 1991; MACHADO, 1992).

Para transferir os discos de um pino para outro, as regras que devem ser seguidas são:

1. Não é permitido mover mais de um disco em cada movimento;
2. Um disco de tamanho maior nunca pode se sobrepor a um de tamanho menor;
3. Uma determinada peça (disco) não pode ficar fora do jogo, ou seja, deve estar em um dos pinos ou em movimento;
4. Só é permitido movimentar os discos que não estão sobrepostos por outro ou outros.

Nesse jogo, o jogador deverá aliar as regras com o número mínimo de movimentos para atingir seu objetivo. Dessa forma, a interpretação de como ocorreu as jogadas feitas pelo aluno, o conduzirá à construção dos conteúdos matemáticos.

Os conteúdos matemáticos que podem ser relacionados com o jogo Torre de Hanói, são: função exponencial e progressão geométrica. Nesse trabalho, serão abordadas as fórmulas que esses conteúdos envolvem, assim como as aplicações dessas fórmulas.

METODOLOGIA

A aplicação do jogo Torre de Hanói foi feita com os acadêmicos do 1º ano do curso de licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Centro-Oeste – UNICENTRO (*campus* de Irati-PR) e ocorreu em uma aula da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. Para tanto, a metodologia utilizada foi qualitativa porque visou instigar a interpretação dos alunos sobre o jogo, por conseguinte buscou-se utilizar da ferramenta de jogos, usando a Torre de Hanói para desenvolver os conteúdos que podem ser trabalhados a partir do mesmo.

Segundo Moura (2008):

[...] o jogo aparece dentro de um amplo cenário que procura apresentar a educação, em particular a educação matemática, em bases cada vez mais científicas, passando a ser definido como importante aliado do ensino formal de matemática. (MOURA, 2008, p. 76).

Apresentou-se aos alunos o jogo Torre de Hanói mostrando a eles que o mesmo pode ser usado em sala de aula apresentando resultados satisfatórios, como foi comprovado na aplicação feita. A qual possibilitou o desenvolvimento do raciocínio lógico dos alunos, sendo que dessa forma foi possível o desenvolvimento de conhecimentos sobre conteúdos de exponenciação.

APLICAÇÃO DO JOGO

Para a realização das atividades foi apresentado o jogo, sua lenda, as regras e os objetivos. Para demonstrar o procedimento a ser seguido, foi mostrado como mover 3 discos como o número mínimo de movimentos. Depois disso, objetivando o trabalho em equipes, formaram-se grupos de 3 integrantes e os alunos jogaram utilizando um número maior de discos.

No momento em que jogavam, cada aluno fez suas interpretações sobre o jogo, com o propósito de descobrir, de forma clara e significativa, os conteúdos matemáticos função exponencial e progressão geométrica, e as fórmulas relacionadas a esses conteúdos. Nesse contexto, segundo Brenelli (2001, p. 178) o aluno ao jogar “organiza e pratica as regras,

elabora estratégias e cria procedimentos a fim de vencer as situações-problema desencadeadas pelo contexto lúdico”.

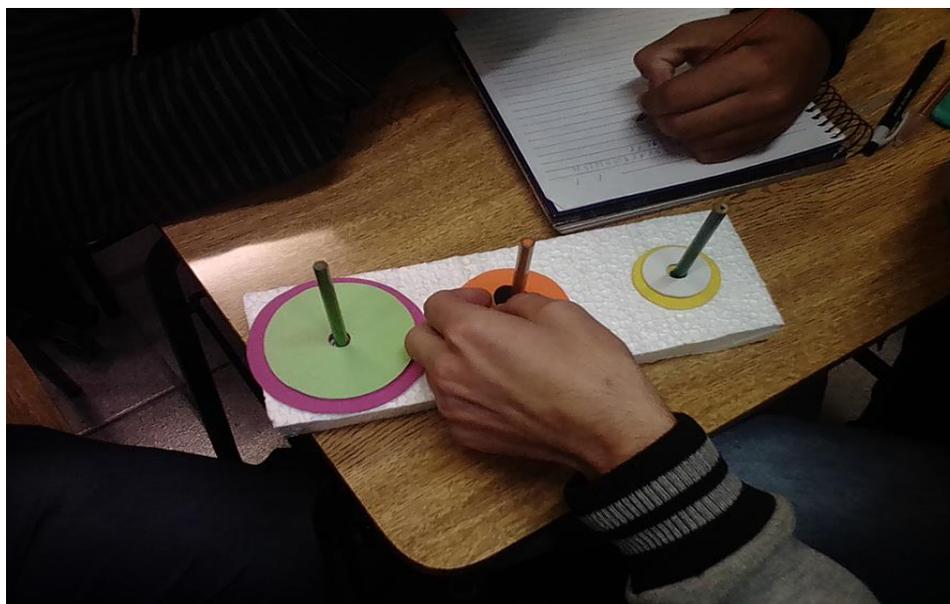


Figura 2 – Fotografia da aplicação do jogo
Fonte: os autores

▪ DEDUÇÃO DAS FÓRMULAS DE EXPONENCIAÇÃO

Foram trabalhadas duas fórmulas com os alunos, e através das mesmas foi possível descobrir quais são os conteúdos matemáticos relacionados ao jogo. A primeira fórmula é obtida através do estudo dos seguintes valores extraídos do jogo Torre de Hanói:

Tabela 1 – Relação entre o número de peças e o número mínimo de movimentos

Número de peças	Número mínimo de movimentos
3	7
4	15
5	31
6	63
...	...

Fonte: os autores

Conclui-se, que a fórmula que sintetiza esses dados é $f(n) = 2^n - 1$, sendo $f(n)$ o número mínimo de movimentos para que se atinja o objetivo do jogo, e n o número de peças (discos) que está sendo usado para jogar.

Outra fórmula é obtida através da investigação do movimento de cada uma das peças. Dentre as peças que estão sendo usadas para jogar, considerando o número mínimo de movimentos, os alunos puderam notar que o disco maior, o primeiro sobre a base, sempre terá 1 movimento; o segundo disco da base, 2 movimentos; o terceiro 4 movimentos; a quarto 8; a quinto 16; a sexto 32; e essa ordem seguirá sucessivamente.

Analisando esses dados, constata-se, que a fórmula que sintetiza o número de movimentos de cada peça é a expressão algébrica 2^n . Fazendo a representação de cada uma das peças pelo termo genérico P_n , (peça n), tem-se que a peça maior será indicada pelo termo P_0 ; a segunda maior por P_1 ; seguindo a ordem crescente, tem-se P_2 ; P_3 ; P_4 ; P_5 ; e sempre seguirá o mesmo padrão.

▪ RELAÇÃO DAS FÓRMULAS COM CONTEÚDOS MATEMÁTICOS

Facilmente percebe-se que a fórmula $f(n) = 2^n - 1$ é uma função exponencial, onde o número mínimo de movimentos $f(n)$ está dado em função do número de peças n . Sendo possível obter o número de movimentos das peças antes de começar a jogar. Por exemplo, com 7 peças o número mínimo de movimentos será: $f(7) = 2^7 - 1 \Rightarrow f(7) = 128 - 1 \Rightarrow f(7) = 127$, ou seja, 127 movimentos.

Já a fórmula 2^n constitui a sequência (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...) que é uma progressão geométrica (PG) de termo inicial 1 e razão 2. Assim, após ser feita a denominação P_n para as peças, é possível saber, antes de jogar, quantos movimentos cada uma das peças terá. Por exemplo, utilizando 10 peças e o número mínimo de movimentos; a maior peça (P_0), terá 2^0 movimentos, ou seja, 1 movimento; a quinta peça na ordem crescente (P_4), por exemplo, terá 2^4 movimentos, ou seja, 16 movimentos; e a menor peça (P_9) terá 2^9 movimentos, ou seja, 512 movimentos.

Assim, através da investigação do jogo, os alunos o relacionaram com conhecimentos matemáticos. Nesse contexto, Borin (1998, p. 10-11) faz a seguinte afirmação sobre a conduta do aluno ao jogar: “caberá o papel daquele que busca e constrói o seu saber através da análise das situações que se apresentam no decorrer do processo”.

Após a investigação realizada pelos alunos, foi feita a apresentação das fórmulas e dos conteúdos relacionados ao jogo. Nesse momento, os alunos obtiveram suas conclusões, ou seja, alguns constataram que já haviam descoberto as fórmulas e os conteúdos no momento do jogo, e outros descobriram o raciocínio completo usado para a dedução das fórmulas e dos conteúdos, sendo que os mesmos haviam chegado em grande parte desse raciocínio correto.

▪ **OUTRAS APLICAÇÕES DAS FÓRMULAS**

Foram apresentadas outras aplicações das fórmulas aos alunos. São elas:

• **USO DE POTÊNCIAS DE 2 PARA FAZER CHAVEAMENTO DE COMPETIÇÕES**

Para a realização de torneios amadores geralmente usa-se a metodologia de sortear os respectivos confrontos a cada rodada. Se o número de jogadores não for igual a uma potência de 2, em algum momento sobrar um número ímpar de equipes (ou jogadores), fazendo com que uma das equipes fique isenta de jogar na rodada. Porém, dependendo do número de jogadores poderá sempre ocorrer um número ímpar de equipes até que se chegue na final, como por exemplo se tivermos 33 equipes, como é mostrado na tabela 2:

Tabela 2 – Representação de uma das formas de serem feitos chaveamentos de competições

Rodada	Número de equipes	Número de jogos	Número de equipes isentas
1	33	16	1
2	17	8	1
3	9	4	1
4	5	2	1
5	3	1	1
6	2	1	0

Fonte: os autores

Nesse exemplo, ocorreu que nos sorteios feitos em cada rodada, com exceção da final, sempre uma equipe ficou isenta, e como se trata de sorteios, uma mesma equipe pode ficar isenta em várias rodadas.

Para eliminar os sorteios no decorrer das competições, é possível fazer o chaveamento utilizando as potências de 2, ou seja, usando a fórmula 2^n .

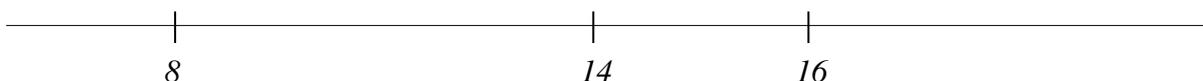
O processo de chaveamento funciona da seguinte maneira: em uma reta numérica é representado o número de equipes, em seguida é localizado o antecessor e o sucessor desse número que pertence à potência de 2, então o número de jogos a serem realizados na primeira rodada será a diferença entre o número de equipes e a respectiva potência de 2 que antecede esse número, já a diferença entre o número de equipes e a respectiva potência de 2 que sucede, será o número de equipes que ficarão sem jogar na primeira rodada, sendo que as mesmas serão definidas por um sorteio inicial. Na segunda rodada, considerando que as equipes perdedoras são eliminadas, sempre restará um número de equipes que podem ser representadas por uma potência de 2 e, conseqüentemente, nas rodadas seguintes também.

Para 33 equipes, por exemplo, é feita a seguinte reta numérica:



Nesse caso, tem-se que $33 - 32 = 1$, então haverá 1 jogo, e como $64 - 33 = 31$, ficarão 31 equipes sem jogar na primeira rodada; e nas rodadas subsequentes sobrarão os seguintes números de equipes 32, 16, 8, 4, 2, ou seja, todos podem ser descritos por potência de 2.

No caso de 14 times, tem-se a reta numérica:



Serão, para esse caso, 6 jogos ($14 - 8 = 6$), e ficará 2 equipes sem jogar ($16 - 14 = 2$); e nas outras rodadas sobrarão times que são potências de 2 (8, 4 e 2).

Com esse modelo de chaveamento de competições, ocorrerá que ficarão times sem jogar somente na primeira rodada, e a chance de que um mesmo time fique sem jogar mais de uma vez será eliminada.

- **RELAÇÃO ENTRE OS FORMATOS DE PAPEL (A_0, A_1, \dots, A_8)**

Como sabemos, existem vários tamanhos de folhas de papel, são exemplos: $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$. Esses tamanhos constituem um padrão que é utilizado pela Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), e a norma que determina o uso desse padrão é a NBR10068 que foi elaborada no ano de 1987.

Existem relações entre as folhas de diferentes tamanhos, considerando a folha A_4 , a mais utilizada, se a dobrarmos ao meio formaremos 2 folhas A_5 , se dobramos as 2 folhas A_5 , que estão sobrepostas, formaremos 4 folhas A_6 , e se dobrarmos estas 4 folhas A_6 que estão sobrepostas, formaremos 8 folhas A_7 , e assim sucessivamente. Ou seja, uma folha A_4 dobrada ao meio originou 2 folhas A_5 , e cada uma das folhas A_5 originou 2 folhas A_6 , também cada folha A_6 originou 2 folhas A_7 . Dessa forma, de 1 folha A_4 é possível obter 2 folhas A_5 ou 4 folhas A_6 ou 8 folhas A_7 , e esse padrão continuará se repetindo. Sabe-se então que um determinado tamanho de folha A_n formará, quando dobrada ao meio, duas folhas de tamanho A_{n+1} . Assim, tomando inicialmente o maior tamanho de papel existente que é o A_0 , de 1 folha de A_0 é possível obter 2 folhas de A_1 ou 4 folhas de A_2 ou 8 folhas de A_3 ou 16 folhas de A_4

ou 32 folhas de A_5 ou 64 folhas de A_6 ou 128 folhas de A_7 , ou então 256 folhas de A_8 . A figura 3 mostra essa relação, e expressa as dimensões dos tamanhos de papel.

Percebe-se que o padrão dos tamanhos de papel segue a PG 2^n . Uma vez constatado que isso ocorre, é possível verificar, por exemplo, quantas folhas de papel A_8 podem ser obtidas de uma folha A_0 , basta calcular $2^8 = 256$, portanto de uma folha A_0 é possível obter 256 folhas A_8 . Outro exemplo que pode ser feito é: quantas folhas A_7 podem ser obtidas de uma folha A_2 ? Para chegar no valor basta fazer $7 - 2 = 5$, e, $2^5 = 32$, ou seja, 32 folhas. A subtração $7 - 2$ para chegar no expoente 5, é feita seguindo a mesma lógica de que foi feita a subtração $8 - 0$ para chegar no expoente 8 no exemplo anterior e considerando as propriedades de divisão de potências de mesma base.

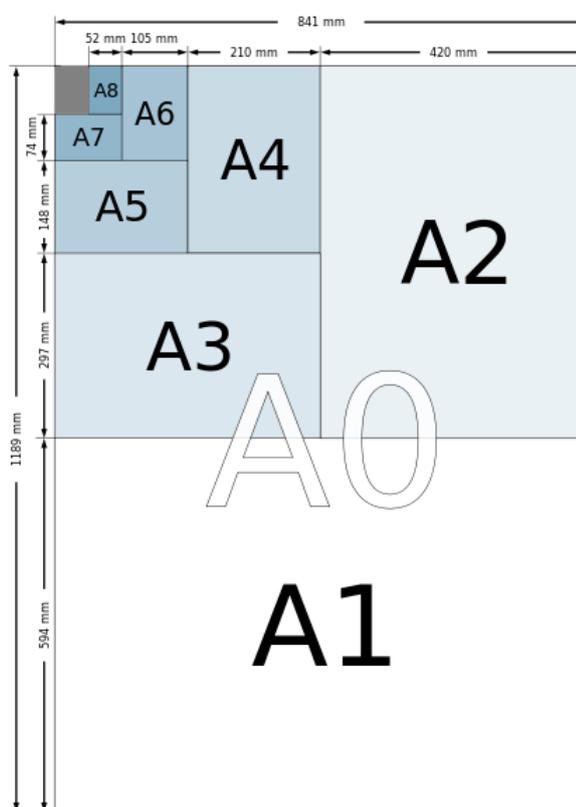


Figura 3 – Tamanhos do papel
Fonte: selens.com.br

- **USO DA PG 2^n EM PROVAS DE CONCURSOS**

Muitos concursos elaboram as opções das questões de forma que possam ocorrer de mais de uma questão apresentar resposta correta, as alternativas, que na maioria das vezes são 5, são enumeradas da seguinte forma:

(01) primeira alternativa;

- (02) segunda alternativa;
- (04) terceira alternativa;
- (08) quarta alternativa;
- (16) quinta alternativa;

e o resultado final é obtido com a somas das questões que são consideradas corretas.

Verifica-se que a enumeração das alternativas (1, 2, 4, 8, 16) constituem a PG 2^n que se relaciona com o jogo trabalhado, nesse caso a PG é finita. E, ao analisar essa PG nesse contexto, verifica-se que sua soma, que é dada pela fórmula $S = \frac{q^n - 1}{q - 1}$, com $q = 2$ e $n = 5$, é 31. Analisando a fórmula da soma constata-se que, exclusivamente para esse caso, ela pode ser escrita somente como $S = q^n - 1$, que é a mesma fórmula do número mínimo de movimentos no jogo Torre de Hanói ($f(n) = 2^n - 1$), porém com um significado diferente.

Nesse caso, a soma máxima que o candidato poderá obter ao somar as alternativas que julgar corretas é 31. É importante destacar que a PG (1, 2, 4, 8, 16) tem a propriedade de que somando alguns termos presentes nela, é possível obter todos os números de 1 a 31. Exemplos: $13 = 1 + 4 + 8$; $18 = 2 + 16$; $29 = 1 + 4 + 8 + 16$.

Verifica-se que nesse modo de pontuação em provas de concursos o aluno tem uma forma mais elaborada para expressar as respostas das questões, se comparado à concursos que têm 5 alternativas não enumeradas e em que apenas 1 alternativa está correta.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Os objetivos pretendidos com a aplicação do jogo Torre de Hanói foram alcançados como se esperava, pois os alunos descobriram, por meio da investigação do jogo e também com a explicação que foi feita posteriormente, que existem fórmulas relacionadas com esse jogo, e que também existem conteúdos matemáticos relacionados ao mesmo como função exponencial, progressão geométrica, entre outros; e que com esses conteúdos, que abrangem as fórmulas descobertas através da análise do jogo, é possível trabalhar várias aplicações interessantes do cotidiano. Nesse contexto, afirma D'Ambrosio (2005, p. 63) “[...] muito mais que a importância acadêmica das disciplinas, o currículo reflete o que a sociedade espera das respectivas disciplinas que o compõem”.

Dessa forma, ficou explícito que o jogo Torre de Hanói proporciona aulas lúdicas, mas também têm o seu grau de teoria, e com esse estudo teórico é possível desenvolver conhecimentos sobre conteúdos e suas aplicações no dia a dia.

CONSIDERAÇÕES

A apresentação do jogo Torre de Hanói aos alunos, proporcionou a eles um momento de estudo sobre o mesmo, ou seja, uma investigação matemática, para que eles descobrissem as fórmulas matemáticas que sintetizam o funcionamento do jogo e também para que descobrissem com quais conteúdos matemáticos o jogo se relaciona. Dessa forma, os acadêmicos puderam verificar com a própria prática que o jogo matemático é um instrumento educativo que se bem explorado pode gerar fórmulas matemáticas, conteúdos e aplicações, trabalhando assim a resolução de problemas de uma forma lúdica. Então, conhecendo essa metodologia de ensino, eles também poderão aplicá-la com seus futuros alunos, proporcionando uma aula interessante, com atividades desafiadoras e que provavelmente será muito produtiva.

Portanto, ao longo desse trabalho fica explícito que o jogo Torre de Hanói pode ser considerado um ótimo instrumento pedagógico, estimulando o raciocínio lógico e proporcionando o estudo de conteúdos matemáticos como função exponencial e progressão geométrica. Dessa forma, acredita-se que essa pesquisa incentivará muitos professores e futuros professores de matemática a usarem o jogo Torre de Hanói em sala de aula.

REFERÊNCIAS

ANTUNES, Celso. **Jogos para estimulação das múltiplas inteligências**. 10 ed. Petrópolis: Vozes, 2002.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR10068**: Folha de desenho - Leiaute e dimensões. Rio de Janeiro, 1987.

BORIN, J. **Jogos e resolução de problemas**: uma estratégia para as aulas de matemática. 3 ed. São Paulo: IME/USP, 1998.

BRENELLI, R. P. Espaço lúdico e diagnóstico em dificuldades de aprendizagem: contribuição do jogo de regras. SISTO, F. F. (Org.) et al. **Dificuldades de aprendizagem no contexto psicopedagógico**. 1 ed. Petrópolis, Rio de Janeiro: Vozes, 2001, p. 167-189.

D' AMBROSIO, U. **Etnomatemática**: elo entre as tradições e a modernidade. 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

DANTE, L.R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. 2 ed. São Paulo: Ática, 1998.

FERRERO, L. **El juego y la matemática**. 1 ed. Madrid: La Muralla, 1991.

GRANDO, R. C. **O Jogo e suas Possibilidades Metodológicas no Processo Ensino-Aprendizagem da Matemática.** 1995. 175 f. Dissertação (Mestrado em Educação, subárea: Matemática). UNICAMP, Campinas, 1995.

MACHADO, N. J. **Matemática e Educação: alegorias, tecnologias e temas afins.** 5 ed. São Paulo: Cortez, 1992.

MOURA, Manuel O.de. **Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação.** 11 ed. São Paulo: Cortez, 2008.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas.** Trad. e adapt.: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.