



UMA EXPERIÊNCIA COM A GEOMETRIA FRACTAL NO ESTÁGIO SUPERVISIONADO

Fernanda Boa Sorte Rocha
Universidade Estadual de Londrina - UEL
fernandabsrocha@outlook.com

Gustavo Granado Magalhães
Universidade Estadual de Londrina - UEL
gustavo_granado_magalhaes@hotmail.com

Magna Natália Marin Pires
Universidade Estadual de Londrina - UEL
magnapires@yahoo.com.br

Resumo: Este trabalho tem como objetivo relatar o envolvimento dos alunos e as discussões emergentes da resolução de uma das tarefas de uma oficina na perspectiva da Investigação Matemática. A oficina, proposta para alunos do 1º ano do Ensino Médio de uma escola central da cidade de Londrina, no Paraná, foi realizada na manhã de um sábado com duração de 4 horas e teve como tema a Geometria Fractal. A experiência relatada é parte das ações do Estágio Supervisionado do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Londrina. Para planejamento da oficina, foram elaboradas Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem (THA) com o intuito de simular possíveis resoluções, dúvidas e encaminhamentos. A partir da experiência, considera-se que o caráter aberto das investigações matemáticas, que possibilita uma variedade de caminhos para os estudantes seguirem partindo de uma mesma tarefa, pode auxiliar na formalização dos conteúdos pelos professores, que têm mais elementos para relacionarem com o conteúdo em questão, e pode originar a discussão de diversos tópicos matemáticos além dos planejados. Além disso, considera-se que a elaboração das THA embasa o professor durante a condução da aula, deixando-o mais confiante e seguro.

Palavras-chave: Estágio supervisionado. Investigação Matemática. Trajetória Hipotética de Aprendizagem. Geometria Fractal.

INTRODUÇÃO

As Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná apontam que as noções de Geometria não Euclidiana devem ser aprofundadas no Ensino Médio, para que os estudantes “ampliem seu conhecimento e pensamento geométrico”. Durante a exploração de aspectos da Geometria Fractal, por exemplo, o aluno deve ser conduzido a refletir e observar o senso estético das entidades geométricas analisadas e suas propriedades. (PARANÁ, 2008, p.57).

No Caderno de Expectativas de Aprendizagem da disciplina de Matemática para o Ensino Médio, espera-se que o aluno identifique “conceitos da Geometria Fractal na lei de

formação de determinadas Funções”, reconheça “existência de diversos modelos e sistemas geométricos logicamente consistentes, além do euclidiano”, reconheça “aplicações das Geometrias Não Euclidianas nos problemas do espaço real” e resolvam “situações-problema envolvendo as Geometrias Não Euclidianas”. (PARANÁ, 2012, p.94).

Nesse sentido é importante que os alunos vivenciem experiências escolares que envolvam noções das Geometrias não Euclidianas vinculadas com aplicações no espaço real. Com isso, no contexto do Estágio de Regência, realizado no 4º ano do curso de Licenciatura em Matemática pelos dois primeiros autores deste trabalho no ano de 2018, foi elaborada uma Oficina sobre Geometria Fractal, desenvolvida com alunos do 1º ano do Ensino Médio, no período de uma manhã, das 8h às 12h.

Para este trabalho, selecionou-se uma das tarefas aplicada na oficina e relatou-se o envolvimento dos alunos e as discussões emergentes em sala de aula para posterior formalização do conteúdo proposto.

O CONTEXTO – ESTÁGIO DE REGÊNCIA

A experiência relatada neste trabalho é uma parte das ações realizadas na disciplina Prática e Metodologia do Ensino de Matemática II: Estágio Supervisionado do 4º ano do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Londrina, no Paraná, em 2018. Um dos componentes dessa disciplina é a realização da regência para alunos do Ensino Médio, o que pressupõe algumas etapas. São elaborados planos de oficina, orientados por professores do Departamento de Matemática da universidade, a partir dos conteúdos sugeridos pela escola em que a regência ocorrerá. Essas oficinas são aplicadas e é feito um relatório com a descrição e análise das ações realizadas em sala de aula pelos estagiários.

A oficina em questão foi elaborada pelos dois primeiros autores deste trabalho e orientada pela terceira autora. A aplicação foi em uma turma do 1º ano do Ensino Médio de um colégio localizado na região central da cidade de Londrina, e teve a duração de 4 horas em um sábado de manhã. O tema da oficina para essa turma, escolhido pelos professores do colégio onde o estágio aconteceu, foi Geometria não Euclidiana, com flexibilidade para os estagiários adotarem um eixo a seguir. De acordo com o interesse dos estagiários, escolheu-se trabalhar com a Geometria Fractal.

A GEOMETRIA FRACTAL

Por muito tempo, a Geometria Euclidiana foi a única referência para representar os objetos do mundo em que vivemos. Em meados do século XIX, começou-se a repensar alguns aspectos desta geometria, o que culminou no desenvolvimento das geometrias não euclidianas. Por volta de 1975, Benoit Mandelbrot, iniciou o desenvolvimento da geometria fractal motivado pela necessidade de representar fenômenos da natureza que não possuíam formas regulares, assim como relatado em seu livro *The Fractal Geometry of Nature*:

Por que a geometria é frequentemente descrita como "fria" e "seca"? Uma razão está na sua incapacidade de descrever a forma de uma nuvem, uma montanha, um litoral ou uma árvore. As nuvens não são esferas, as montanhas não são cones, as linhas costeiras não são círculos e a casca não é lisa, nem os relâmpagos viajam em linha reta. (MANDELBROT, 1983, p.1, tradução nossa).

Foi Mandelbrot que cunhou a expressão fractal, que segundo o dicionário etimológico online Michaelis (2015), é derivada do adjetivo latino *fractus*, que significa quebrado. Um fractal é a figura geométrica em que tem como principais características a auto similaridade, a complexidade infinita e a dimensão fracionária. Na proposta relatada, abordam-se os conceitos de auto similaridade e de complexidade infinita com os alunos.

A característica de auto similaridade dos fractais indica que essas figuras apresentam cópias aproximadas de si mesmas em seu interior, ou seja, parte da figura em uma escala menor é semelhante a outras partes em uma escala maior. Um fractal tem como característica a complexidade infinita por apresentar uma infinidade de detalhes, ou seja, sempre terá outra figura no interior das menores porções do fractal, sendo impossível representá-lo em sua totalidade.

A construção de fractais se dá por um processo que consiste na repetição de um ato ou princípio infinitamente e, esse processo é chamado de iteração. A iteração pode ser algébrica, em que a rotina de repetição é dada a partir de uma equação algébrica como unidade processadora, ou geométrica, em que o processador é uma regra aplicada em uma figura geométrica ou em alguma parte específica dela.

Dessa forma, considera-se o fractal como uma figura geométrica obtida através de um processo iterativo em que uma parte se assemelha a outra em escalas diferentes.

A PROPOSTA DE ENCAMINHAMENTO DA AULA

O estágio de regência da UEL deve ser desenvolvido de acordo com tendências metodológicas da Educação Matemática, diferentes do método tradicional de ensino.

Escolheu-se a utilização da Investigação Matemática como alternativa ao ensino tradicional já que essa é uma das tendências metodológicas indicadas em documentos que norteiam a prática dos professores.

De acordo com Ponte *et al.* (1998), as investigações matemáticas têm caráter muito aberto, referente a contextos variados, que podem ter como ponto de partida uma situação proposta tanto pelos professores, quanto pelos alunos. Elas partem de situações que precisam ser compreendidas ou de um conjunto de dados que precisa ser organizado e interpretado (PONTE; OLIVEIRA; CUNHA; SEGURADO; 1998).

Nessa perspectiva, a dinâmica da aula foi planejada com base nas três fases da Investigação Matemática, de acordo com Oliveira, Segurado e Ponte (1998), que são: i) a introdução da tarefa pelo professor; ii) a realização da tarefa pelos alunos; iii) e a apresentação dos resultados e sua discussão.

A primeira fase, de introdução da tarefa, é de suma importância e pode influenciar no sucesso do trabalho. Ela pode ser apenas um ponto de partida ou uma questão bem definida. Nessa fase, os alunos ainda iniciam a interpretação da situação e definem o caminho que seguirão (FONSECA; BRUNHEIRA; PONTE, 1999).

Na fase de realização da tarefa, o professor interage com e orienta os alunos, fazendo-os adquirirem uma atitude investigativa, além de manter uma atitude questionadora, levando os alunos a analisarem e refletirem sobre o que estão produzindo e procurarem significados para suas descobertas (FONSECA; BRUNHEIRA; PONTE, 1999).

Na apresentação e discussão dos resultados, o professor é moderador e orientador, e estimula a comunicação entre os alunos. Nesse momento, confrontam-se os resultados do aluno, estimulando sua argumentação em defesa de suas afirmações (FONSECA; BRUNHEIRA; PONTE, 1999).

Com essa dinâmica, a intenção era propor situações que estimulassem a criatividade dos alunos e os motivassem a solucionar problemas pela curiosidade causada pela situação ou pelo desafio do problema. De acordo com D'Ambrosio, “na matemática escolar o aluno não vivencia situações de investigação, exploração e descobrimento” (D'AMBROSIO, 1989, p.2) e o envolvimento e ações dos alunos na estratégia de encaminhamento de aula escolhida pode mudar essa realidade.

A realização do trabalho deve ser em grupos, isso porque, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (1998), trabalhar coletivamente favorece o desenvolvimento de capacidades cognitivas, afetivas e de interação social, e os alunos aprendem a cooperar e entrar em um consenso das resoluções, a expressar seus pensamentos e

compreender os pensamentos dos outros, a discutir a respeito de suas dúvidas, incorporando, reestruturando e ampliando suas resoluções e compreensões sobre os conceitos estudados.

A TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM

Durante a construção do plano de oficina, além dos tópicos referentes ao conteúdo a ser trabalhado e à perspectiva de ensino, elaboraram-se Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem (THA) com o intuito de simular possíveis desenvolvimentos da atividade, utilizando possíveis dúvidas dos alunos e os possíveis encaminhamentos diante essas dúvidas.

Rossetto (2016), baseada em Simon (1995), indica uma THA como um planejamento teórico bem detalhado que apresenta três componentes:

1. o objetivo do professor com direções definidas para a aprendizagem de seus alunos;
2. as atividades de ensino;
3. o processamento hipotético de aprendizagem (uma suposição de como o pensamento e o entendimento dos alunos serão colocados em ação no contexto de aprendizagem das atividades). (p.25)

Em consonância com Rossetto (2016), considera-se que a construção da Trajetória Hipotética de Aprendizagem possibilita ao professor maior segurança tanto na elaboração da proposta quanto na sua execução (ROSSETTO, 2016, p.25).

A TAREFA PROPOSTA

A primeira tarefa da oficina, selecionada para análise, tinha como objetivo que os alunos reconhecessem semelhanças entre as imagens do leito de um rio, de uma fortificação, de um cristal de gelo e de um pulmão humano, identificando padrões na disposição das figuras. A partir das resoluções dos alunos, pretendia-se formalizar os conceitos de auto similaridade e de complexidade infinita e pretendia-se que os alunos estabelecessem relações e configurassem as primeiras noções de o que é um fractal.

Tarefa 1) (ADAPTADO) O que o pulmão humano, o leito de um rio, a fortificação e o cristal de gelo têm em comum?

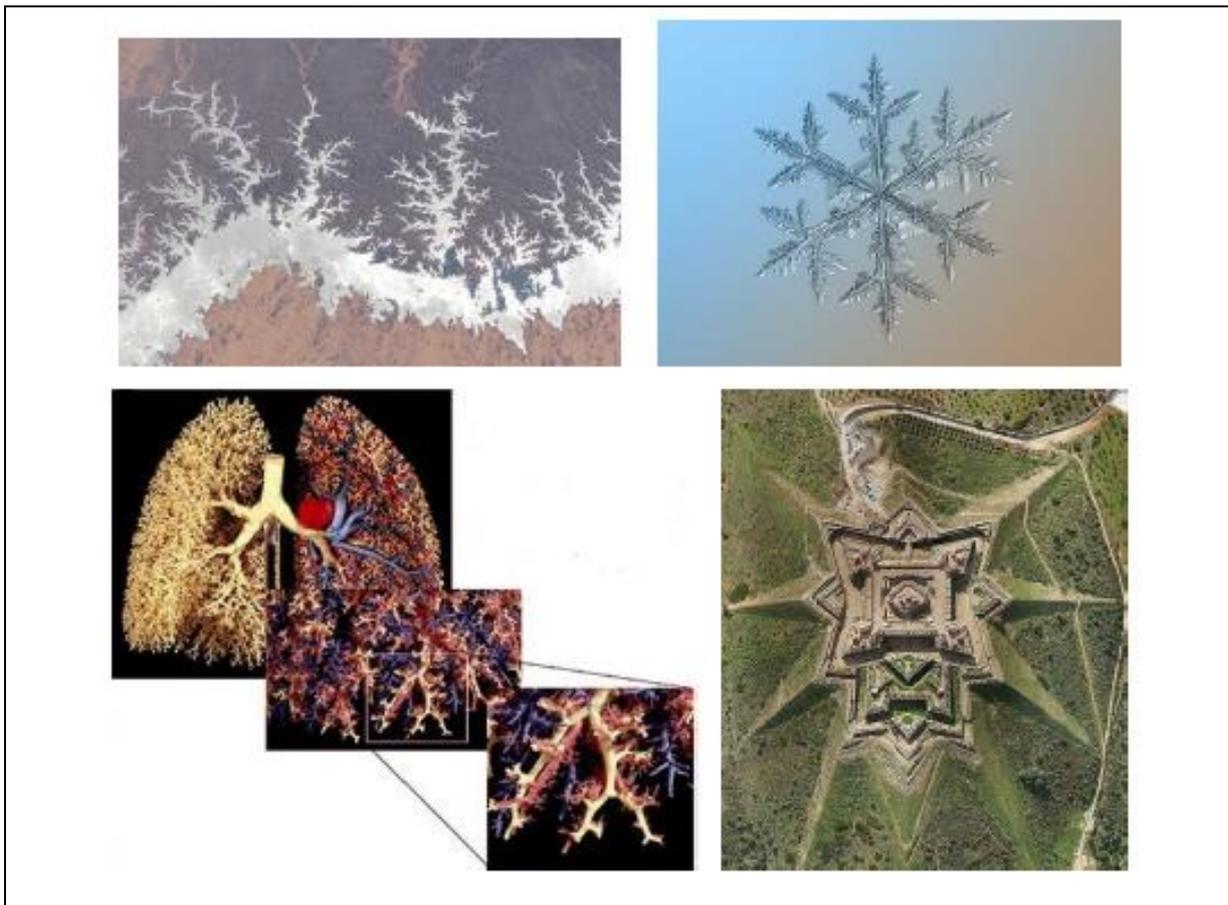
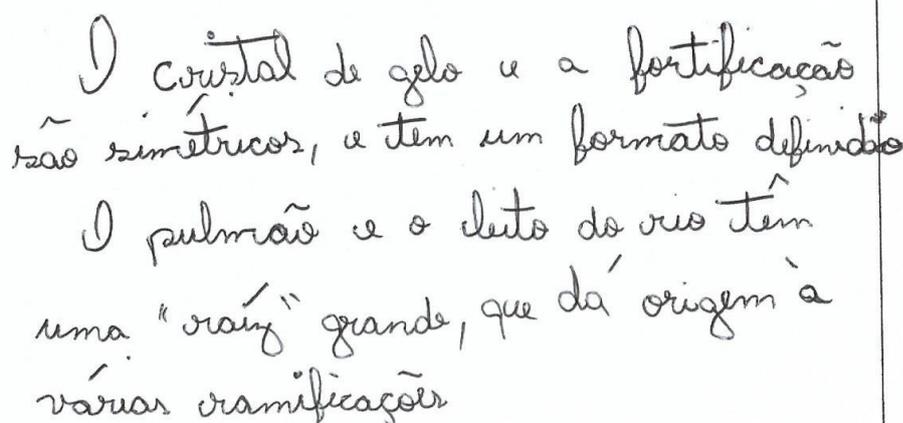


Figura 1 – Tarefa aplicada na oficina

Fonte: Disponível em: <<https://cientistasdescobriramque.com/2014/12/03/o-que-tem-opulmao-humano-em-comum-com-o-leito-de-um-rio-uma-fortificacao-ou-um-cristal-degelo/>>. Acesso em: maio 2018

RELATO DA ATIVIDADE E DISCUSSÃO

Os alunos, dispostos em grupos de três ou quatro, utilizaram aproximadamente 30 minutos da aula para a realização da tarefa. O relato e a discussão da atividade serão organizados a partir da imagem da resolução dos alunos dos grupos, seguido de comentários a respeito destas resoluções.



O cristal de gelo e a fortificação
são simétricos, e tem um formato definido
O pulmão e o leito do rio têm
uma "raiz" grande, que dá origem a
várias ramificações

Figura 2 – Resolução da Tarefa 1 pelo Grupo 1
Fonte: os autores

Em sua resolução, o Grupo 1 analisou as figuras duas a duas, encontrando semelhanças entre o pulmão humano e o leito do rio, como sugere a resposta “o pulmão humano e o leito do rio têm uma ‘raiz’ grande, que dá origem à várias ramificações”, e entre o cristal de gelo e a fortificação, afirmando “O cristal de gelo e a fortificação são simétricos, e tem um formato definido”.

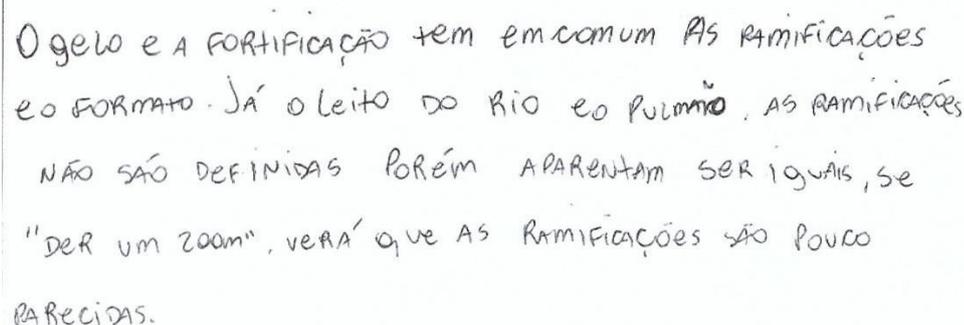
Durante as intervenções, questionou-se o motivo de não considerarem o pulmão humano e o leito do rio como figuras simétricas e definidas. O grupo alegou que as ramificações se “embaralhavam”, eram sinuosas, por isso não se encaixavam no outro agrupamento. Uma possibilidade a partir dessa resolução é trabalhar com o conceito de simetria, sendo que o tema surgiu na própria resolução dos estudantes, sem influência dos estagiários.

A respeito das ramificações indicadas pelo grupo, questionou-se se havia um padrão que as definiam. O grupo relatou que o padrão poderia ser as próprias ramificações, ou seja, existe uma “raiz” maior, no pulmão e no leito do rio, que vai se dividindo em ramos menores que, por sua vez, se dividem em ramos ainda menores.

Tanto nas produções escritas quanto nas intervenções, notaram-se indícios nas respostas dos estudantes que convergiram para a formalização dos conceitos pretendidos. Nessa tarefa, pela qual se pretendia chegar à formalização dos conceitos de auto similaridade e complexidade infinita, também foi possível estabelecer relações com o conceito de iteração quando os alunos falam a respeito da divisão sucessiva das “raízes”.

A Investigação Matemática, por ter um caráter aberto, possibilita que existam diferentes interpretações e entendimentos de uma mesma tarefa. Isso fica claro na resolução

do Grupo 1, em que apareceram indícios de conteúdos que não foram identificados durante a elaboração do plano de oficina pelos estagiários.



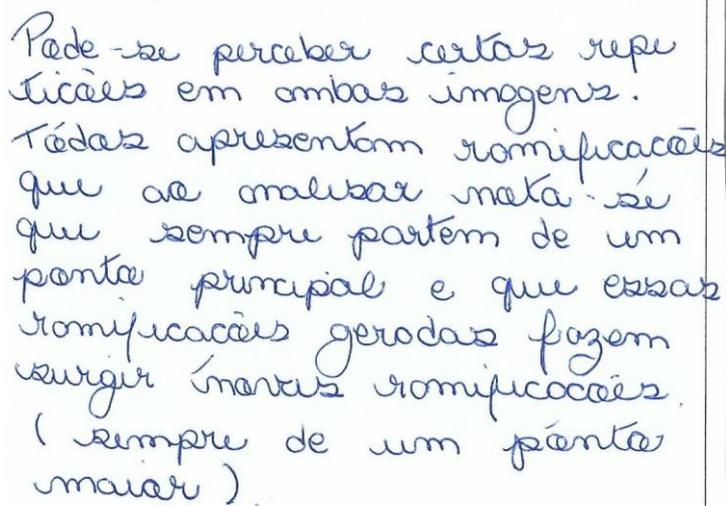
O gelo e a FORTIFICAÇÃO tem em comum AS RAMIFICAÇÕES e o formato. Já o leito do rio e o pulmão, AS RAMIFICAÇÕES NÃO SÃO DEFINIDAS PORÉM APARENTAM SER IGUAIS, se "DER UM ZOOM", VERÁ QUE AS RAMIFICAÇÕES SÃO POUCO PARECIDAS.

Figura 3 – Resolução da Tarefa 1 pelo Grupo 2
Fonte: os autores

O Grupo 2 também agrupou as imagens duas a duas e de acordo com as similaridades, respondendo que “O gelo e a fortificação têm em comum as ramificações e o formato”. A partir disso, questionou-se qual seria esse formato. De acordo com o grupo, as imagens eram como estrelas, em que o cristal de gelo é como uma estrela de seis pontas e a fortificação a sobreposição de estrelas de quatro pontas.

Durante o planejamento, presumiu-se que os alunos poderiam sentir mais dificuldade em agrupar a fortificação com as outras imagens, entretanto a associação dessa imagem com o cristal de gelo foi muito presente nas resoluções dos grupos. Mesmo com a elaboração das trajetórias indicando possíveis resoluções dos alunos, não é incomum que os alunos resolvam de maneiras inusitadas. Nesse sentido, por mais que as THA não prevejam todas as atitudes dos alunos e indiquem intervenções para todos os casos, ela é fundamental para que o professor realize intervenções baseados no planejamento e se sinta seguro durante essas intervenções.

Quanto ao leito do rio e o pulmão humano, o grupo respondeu que “[...] as ramificações não são definidas, porém aparentam ser iguais, se ‘der um zoom’ verá que as ramificações são pouco parecidas”. Nesse sentido, explicaram que, mesmo não tendo um formato definido, era possível inferir que havia semelhanças se comparassem as “partes” menores com as “partes” maiores, de modo que sempre surgiam caminhos menores partindo das novas ramificações. Tanto esse ponto quanto a ideia de “dar zoom”, relatada na resposta escrita do grupo, remetem à auto similaridade dos fractais, oportunizando a conexão com a formalização desse conceito.



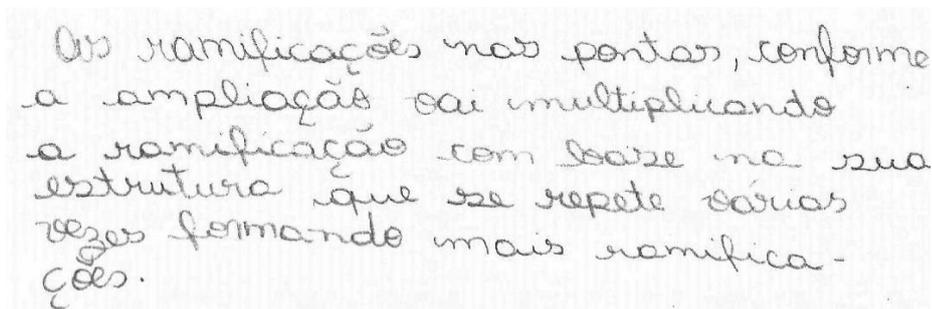
Pode-se perceber certas repetições em ambas imagens.
Todas apresentam ramificações que ao analisar nota-se que sempre partem de um ponto principal e que essas ramificações geradas fazem surgir novas ramificações (sempre de um ponto maior).

Figura 4 – Resolução da Tarefa 1 pelo Grupo 3

Fonte: os autores

Ao ser questionado a respeito das repetições citadas na produção escrita, o Grupo 3 indicou que no pulmão a parte mais aproximada da imagem é similar a aproximação anterior que, por sua vez, também é similar ao todo, remetendo à auto similaridade dos fractais. O mesmo é possível perceber nas outras três imagens.

Os alunos desse grupo salientaram que sempre havia um início que seria a “parte maior” das figuras que originavam novas ramificações. Esse entendimento dos estudantes pode servir como um gancho para o conceito de complexidade infinita, isso porque relatam que sempre haverá uma “parte” maior que originará outras ramificações.



As ramificações nas pontas, conforme a ampliação vai multiplicando a ramificação com base na sua estrutura que se repete várias vezes formando mais ramificações.

Figura 5 – Resolução da Tarefa 1 pelo Grupo 4

Fonte: os autores

O Grupo 4 explicitou que, de acordo com a ampliação das imagens, as ramificações se multiplicam e que a estrutura “base” da imagem se repete diversas vezes nas ramificações. A multiplicação das ramificações pode ser relacionada à complexidade infinita, enquanto a

repetição da “base” da imagem com a auto similaridade. A respeito da fortificação, os integrantes do Grupo 4 indicaram que a sua estrutura “base” seria a figura associada a uma estrela, em que a maior continha outras semelhantes e menores.

Diferente dos anteriores, o Grupo 3 e o Grupo 4 indicaram semelhanças que abrangiam todas as imagens. As tarefas de investigação possibilitam uma variedade de resoluções dos alunos, isso porque cada um busca significados possivelmente diferentes dos outros. Essa variedade de resoluções auxilia na formalização do conteúdo, isso porque o professor pode estabelecer mais conexões entre o que os alunos fizeram e o conteúdo.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Durante a busca e a elaboração das tarefas, procuraram-se situações que envolviam a Geometria Fractal vinculada a aplicações na realidade. Considera-se que essa característica pode ter mobilizado o interesse dos alunos em encontrar objetos de seus contextos que eram também representações de fractais, isso após a resolução da tarefa relatada e da formalização dos conceitos pretendidos pelos estagiários. Essa atitude dos alunos dá indícios do despertar de um senso estético relacionado a entidades geométricas em seu cotidiano.

O caráter aberto das investigações matemáticas, assim como descrito, possibilita uma variedade de possibilidades de caminhos que os alunos podem seguir partindo de uma mesma tarefa. Da tarefa relatada, por exemplo, emergiram outros tópicos, diferentes dos planejados, que poderiam ser explorados pelo professor de acordo com seus objetivos.

Não é sempre que o professor consegue antecipar todos os caminhos apresentados pelos estudantes, entretanto o estudo durante o planejamento e a elaboração de possíveis resoluções, dúvidas e intervenções o auxilia na condução da aula. Dessa forma, esse processo de simulação é importante para que o professor se sinta seguro e preparado para a aula. Essa construção das THA carece de um aprofundamento no estudo do conteúdo que será ensinado, no caso da Geometria Fractal.

Outro aspecto que pode culminar da pluralidade de resoluções dos alunos é o desenvolvimento de mais relações entre produções e os conteúdos a serem formalizados, possibilitando uma significação do conteúdo pelo o aluno.

Considera-se que o estudo para a compreensão do conteúdo a ser trabalhado, bem como para a elaboração do plano de oficina na perspectiva de Investigação matemática por meio de Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem, é de muita relevância para a formação inicial do professor.

Por fim, pressupõe-se que, a partir das reflexões a respeito das resoluções dos alunos apresentados neste trabalho, os esforços durante a elaboração, planejamento e execução do plano de oficina foram essenciais para uma boa condução da aula, em que os alunos se interessaram e participaram, colaborando com os objetivos da aula.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática /Secretaria de Educação Fundamental**. Brasília: MEC / SEF, 1998.

CARVALHO, H. C. **Geometria Fractal**: Perspectivas e possibilidades para o Ensino de Matemática. 2005. 100f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2005.

D'AMBROSIO, Beatriz S. Como ensinar matemática hoje? **Temas e Debates**, Brasília, ano II, n. 2, p. 15-19, 1989.

FRACTAL. In: MICHAELIS. **Dicionário de Língua Portuguesa**. Disponível em: <www.uol.com.br/michaelis>. Acesso em: 29 jun. 2019.

MACHADO, E. S. **Fractal**: Uma Abordagem na Educação Básica. 2017. 61f. Monografia (Especialização em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2017.

MANDELBROT, B. **The Fractal Geometry of Nature**. 3. ed. New York: W.H Freeman, 1983.

PARANÁ, **Diretrizes Curriculares da Educação Básica – Matemática**. Paraná, 2008.

_____, Secretaria da Educação. **Caderno de Expectativas de Aprendizagem**. Curitiba, 2012.

PONTE, J. P., OLIVEIRA, H., CUNHA, H., & SEGURADO, I. **Histórias de investigações matemáticas**. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1998.

ROSSETTO, H. H. P. **Trajetória Hipotética de Aprendizagem sob um olhar realístico**. 2016. 104f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.