



O FRACTAL HEXÁGONO DE DÜRER: UMA POSSIBILIDADE DE EXPLORAÇÃO COM MATERIAIS MANIPULÁVEIS

Leonardo Ferreira Zanatta
Universidade Estadual do Paraná - UNESPAR
leonardo.zanatta04@gmail.com

Karine da Silva Macedo
Universidade Estadual de Maringá - UEM
karinekaahh@gmail.com

Rebeca L. C. Seiscentos
Universidade Estadual de Maringá - UEM
rlseiscentos@gmail.com

Mariana Moran
Universidade Estadual de Maringá - UEM
mmbarroso@uem.br

Veridiana Rezende
Universidade Estadual do Paraná - UNESPAR
rezendeveridiana@gmail.com

Resumo: Os objetos fractais podem ser entendidos como entes matemáticos definidos por determinadas características, tais como a complexidade infinita, dimensão não inteira e a auto-similaridade. Estes objetos compõem a Geometria dos Fractais, uma geometria não euclidiana, e fazem parte da BNCC (Base Nacional Comum Curricular) e das Diretrizes Curriculares para Educação Básica do Estado do Paraná. Neste minicurso propomos a exploração de um objeto fractal denominado Hexágono de Dürer, sendo esta exploração por meio de materiais manipuláveis. A atividade possui como foco a exploração de diversos conceitos da geometria, números e álgebra, sendo estes conceitos presentes na Educação Básica. Com a realização da atividade proposta, espera-se que os participantes do minicurso compreendam a importância da Geometria dos Fractais para as aulas de Matemática, e vislumbrem as possibilidades de trabalho com diversos conceitos matemáticos durante a exploração de tarefas sobre Geometria dos Fractais em sala de aula

Palavras-chave: Fractais, Geometrias Não-Euclidianas, Materiais Manipuláveis.

INTRODUÇÃO À GEOMETRIA FRACTAL

As geometrias não-euclidianas, em especial a geometria dos fractais, embora pouco trabalhadas na Educação Básica, abrem espaço para novas possibilidades de abordagem para conteúdos matemáticos diversos em sala de aula. Os objetos fractais, foram assim nomeados pelo matemático polonês, Benoit Mandelbrot (1924-2010), tomando como base a palavra do latim *fractus*, referindo-se ao verbo “quebrar”. Tendo essa ideia como base, o conceito de

geometria fractal possui uma proximidade ao campo de estudo denominado ciência do caos, a qual tem como intenção observar padrões a algo antes visto como aleatório ou irregular (JANOS, 2008).

Esses conceitos e ideias evoluíram até resultarem em uma definição mais formal de um fractal ou a geometria fractal, desta forma objetos fractais podem ser entendidos como, “[...] uma forma cujas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos” (BARBOSA, 2002, p. 18), embora a definição de fractal continue sendo um tópico a ser aprimorado, há uma congruência de ideias nas definições apresentadas, sendo que todas se reportam à auto-similaridade e complexidade infinita como âmbito de suas explicações.

Esta ideia de auto-similaridade e de complexidade infinita abre espaço para diversas discussões dentro de sala de aula. Assim, trabalhar a interação entre objetos fractais e os alunos incentiva o desenvolvimento da capacidade de se realizar, cálculos de área, perímetro e volume de figuras com complexidade infinita, frações, progressões geométricas e aritméticas, além de uma noção intuitiva quanto à conceitos básicos de limite e de construções geométricas.

Tal interação tem por objetivo proporcionar uma articulação dos conceitos abordados, mobilizando representações figurais e buscando uma conversão para representações algébricas e em linguagem natural. Esta conversão, consoante à Teoria dos Registros de Representação Semiótica, proposta por Raymond Duval, pode contribuir para a efetiva compreensão dos conceitos trabalhados (MORETTI, 2002).

Desta forma, propomos este minicurso com o objetivo de proporcionar aos participantes a construção de um fractal por meio de materiais manipuláveis, e a exploração de diversos conceitos matemáticos, tais como, números decimais, frações, sequências, simetria, área e perímetro de figuras planas dentre outros. As atividades exploradas permitirão ainda a mobilização de ideias de auto-similaridade, generalização e complexidade infinita.

As atividades propostas no contexto do evento EPREM, têm como público alvo, professores e futuros professores que ensinam Matemática, sendo que os pontos abordados nas atividades fazem referência a conteúdos do 9º ano, segundo a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018) e as Diretrizes Curriculares para a Educação Básica para o Estado do Paraná – DCE (PARANÁ, 2008). Cabe citar que embora as atividades aqui apresentadas sejam destinadas à alunos do 9º ano, dadas as devidas adequações e nivelamentos, esta pode ser trabalhada em outros níveis escolares.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS E ATIVIDADES A SEREM DESENVOLVIDAS

As atividades propostas serão trabalhadas inicialmente em grupos, com sugestão de, no máximo, 30 participantes, sendo a construção final do objeto deste minicurso composta pela soma das partes construídas pelos grupos. A construção se dará utilizando materiais manipuláveis disponibilizados pelos proponentes do minicurso que atuarão de forma a guiar os participantes durante a atividade, indicando o passo-a-passo para a construção dos fractais propostos, assim como após a construção, conduzindo a exploração do objeto.

A atividade a ser desenvolvida se trata da construção e exploração do Hexágono de Dürer, sendo tal objeto apontado por Barbosa (2002) como um objeto fractal geométrico plano. A atividade está dividida em duas fases, uma composta pela construção dos objetos por meio de materiais manipuláveis e a segunda por uma tabela de registros que busca investigar aspectos matemáticos inerentes à construção realizada.

O Hexágono de Dürer trata-se de um dos possíveis fractais do tipo Dürer e em seu nível zero ele é visto com um hexágono regular. Passando para o nível um, são formados seis hexágonos regulares inscritos no hexágono do nível anterior e com arestas de proporção 1:3 em relação às arestas do hexágono do nível 0. Os hexágonos formados a cada etapa devem possuir um vértice em comum com cada dos dois hexágonos adjacentes ao mesmo e um vértice em comum com o hexágono do nível anterior.

Seguindo tais indicações o seguinte fractal será formado:

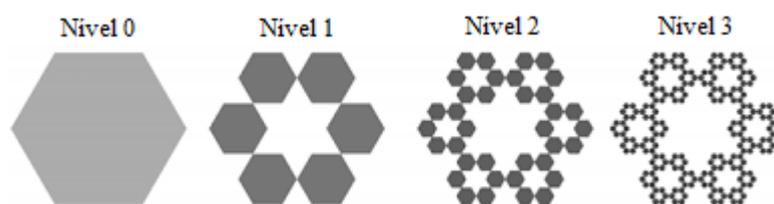


Figura 1 – Hexágono de Dürer

Para que a construção se adeque aos objetivos deste minicurso, são necessários os seguintes itens: folhas de papel laminado, papel craft ou similar preferencialmente de cores contrastantes, régua graduada; tesoura; compasso que possua capacidade de raio igual ou superior à 30cm; cola branca; e lápis. Seguem abaixo os passos a serem seguidos para a construção do fractal.

Nível 0:

1. Em uma folha de papel laminado, em sua parte fosca, marcar um ponto A aproximadamente no centro do papel;

2. Com a ponta seca do compasso em A e raio AB (medida determinada de acordo com o tamanho do papel disponível) traçar uma circunferência;
3. Marcar um ponto B qualquer sobre a circunferência, com a ponta seca do compasso em B e raio AB, traçar um arco que intercepte a circunferência, formando o ponto C;
4. Repetir de forma análoga o passo 3 formando seis pontos sobre a circunferência, sendo eles, B, C, D, E, F e G, os quais indicam os vértices do hexágono regular;
5. Traçar segmentos entre os pontos formados pelo do passo 4 e recortar o papel sobre tais segmentos.
6. Colar o hexágono formado sobre o papel craft, com a face brilhante para cima.

Nível 1:

1. Utilizando os processos expostos no nível 0, construir outros 6 hexágonos com arestas de medida $AB:3$ e recortá-los. Tais hexágonos compõem o nível 1 do objeto fractal;
2. Colar os seis hexágonos do nível 1 sobre o hexágono do nível 0, de forma que cada um deles possua um vértice em comum com cada um dos dois hexágonos adjacentes ao mesmo e um vértice em comum com a construção do nível anterior;

Nível n :

Para qualquer passo da construção basta seguir a ideia apresentada no nível 1, incrementando exponencialmente o número de hexágonos formados e tomando como base o nível $n-1$, sendo que para os propósitos deste minicurso, a construção do objeto será realizada até o nível 2 ou 3, de acordo com o número de participantes e tempo disponibilizado.

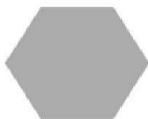
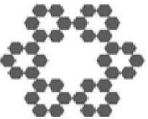
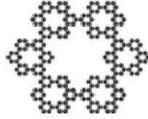
Abaixo segue a construção do fractal apresentada em seus níveis 0, 1 e 2.



Figura 2 – Hexágono de Dürer construído com materiais manipuláveis, níveis 0, 1 e 2.

TABELA DE REGISTROS

Após a construção de tal fractal, os participantes do minicurso serão questionados quanto às ideias e conceitos matemáticos que podem ser extraídos desta atividade. Nela notamos que diversos conceitos matemáticos podem ser explorados, sendo alguns inerentes ao nível de alunos do 9º ano, tais como auto-similaridade, números decimais, frações, sequências, área e perímetro de figuras planas dentre outros. O modelo de tabela de registros a ser explorada está apresentado a seguir e a mesma deve ser preenchida pelos participantes:

	Nível	Número de hexágonos formados	Número total de hexágonos	Comprimento das arestas dos hexágonos formados	Soma do perímetro dos hexágonos formados no nível
	0				
	1				
	2				
	3				
...
	N				

Quadro 1 – Tabela de Registos

Após a construção do objeto fractal, em conjunto à tabela de registros que busca estabelecer generalizações para as características do objeto fractal, serão propostas algumas questões quanto a características específicas do fractal trabalhado. Tais perguntas terão como objetivo levantar reflexões no que diz respeito à conceitos de complexidade infinita e características específicas da geometria dos fractais.

CONSIDERAÇÕES

Com a realização deste minicurso, espera-se que os participantes compreendam a importância da geometria dos fractais para as aulas de Matemática, e vislumbrem as possibilidades de trabalho com diversos conceitos matemáticos, não só de geometria, como também de álgebra durante a exploração de tarefas sobre geometria dos fractais em sala de aula.

A atividade proposta neste minicurso foi pensada para ser trabalhada no 9º ano do Ensino Fundamental. No entanto, ressaltamos que ela pode ser explorada em salas de aula de diversos anos escolares, cabendo aos professores abordarem os conceitos matemáticos correspondentes ao ano escolar almejado. Defendemos que a geometria dos fractais nas aulas de Matemática, com o uso de materiais manipuláveis, além de proporcionar um ambiente propício à mobilização de conceitos em diversos formatos de registros de representação semiótica, traz ainda um aspecto lúdico às aulas de Matemática, atraindo a atenção e motivando os alunos para conhecerem os conceitos que se deseja ensinar.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, R. M. **Descobrimo a Geometria Fractal**: para a sala de aula. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular: educação é a base, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/12/BNCC_19dez2018_site.pdf> Acesso em: 19 de jan. de 2019.

JANOS, M. **Geometria Fractal**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2008.

MORETTI, M. T. **O papel dos registros de representação semiótica na aprendizagem de matemática. Contrapontos**. Ano 2, n.6, p.423 – 437, Itajaí/SC, 2002.

PARANÁ. Referencial Curricular Do Paraná: princípios, direitos e orientações, 2018. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/bncc/2018/referencial_curricular_para_na_preliminar.pdf> Acesso em: 21 de dez. de 2018.