



RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE GEOMETRIA ESPACIAL: ANÁLISE DAS DIFICULDADES DE ALUNOS DO ENSINO MÉDIO EM QUESTÕES DO ENEM 2018

João Alessandro da Luz
Universidade Estadual de Maringá - UEM
joaoalessandro.luz@gmail.com

Marcelo Carlos de Proença
Universidade Estadual de Maringá - UEM
mcproenca@uem.br

Resumo: Este trabalho corresponde a um relato de experiência, cujo objetivo foi investigar as dificuldades na resolução de problemas de geometria espacial, tendo como participantes 34 alunos do 3º ano do ensino médio de uma escola pública do Paraná. Tal pesquisa é descritiva e, para instrumento de coleta de dados, foram usadas três questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) 2018, que envolviam o conteúdo de Geometria Espacial, que também estavam dentro das competências exigidas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) para o ensino da geometria. Os resultados da pesquisa evidenciaram dificuldades dos alunos nas etapas de representação e execução da resolução de problemas. Na questão 159, evidenciaram-se dificuldades de execução para representação de figuras tridimensionais. Já na questão 180, verificaram-se dificuldades na primeira etapa, de representação, o que ocasionou dificuldades nas etapas seguintes. Também foram encontradas dificuldades dos alunos em interpretação e compreensão de enunciados, em operações básicas e desconhecimentos de conteúdos. Tais dificuldades passam pela ausência de competências e habilidades elencadas pelo ENEM e na manipulação algébrica de fórmulas, já evidenciadas em outros trabalhos e que são importantes que sejam identificadas e superadas.

Palavras-chave: Geometria Espacial. Resolução de Problemas. Enem.

INTRODUÇÃO

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) tornou-se uma prova importantíssima em nosso país, seja para avaliação do ensino médio por órgãos governamentais, ou para o ingresso de estudantes em faculdades e universidades através do SISU, ou ainda para o financiamento estudantil em faculdades privadas através do PROUNI e do FIES.

Observamos que nessa avaliação, na área de Matemática e Suas Tecnologias, uma das competências é o “[...] conhecimento geométrico para realizar leitura e representação da realidade e agir sobre ela” (BRASIL, 2019, p. 05), cujas habilidades podemos citar: “[...] a resolução de situações problemas que envolvam conhecimentos de geometria espacial e a

forma de seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano” (BRASIL, 2019, p. 05).

A Base Nacional Curricular (BRASIL, 2017, p. 523) também enfatiza a competência que a Geometria Espacial deve ter para: “Interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação”.

Muitos trabalhos buscam pesquisar sobre as dificuldades dos estudantes na resolução de problemas. Um exemplo, é o trabalho de Alvarenga et al. (2016, p. 01), que salienta em sua pesquisa com alunos de escolas públicas municipais que “Ficou evidente que os estudantes apresentaram dificuldades em interpretar e em modelar problemas, que estão habituados à aplicação direta de fórmulas, sem ter compreendido a situação e que lhes falta habilidade com operações matemáticas”.

Já na pesquisa de Araújo (2015, p. 08) com alunos do ensino fundamental observou-se que os estudantes tiveram “[...] dificuldade para compreender o enunciado do problema, dificuldade em uma etapa do procedimento, dificuldade por desconhecimento do conteúdo e dificuldade conceitual das operações básicas”.

Em se tratando de resolução de problemas na prova de Matemática e suas Tecnologias do ENEM, Mendes e Ribeiro (2016) destacam que:

Observou-se que os alunos do Ensino Médio apresentam dificuldades na resolução das questões de matemática do ENEM devido a uma ineficiência de conteúdo muito grande, mas também não conseguem interpretar um exercício que, em sua estrutura, traga o que se deseja de uma forma mais implícita (MENDES; RIBEIRO, 2016, p. 10).

Partindo desse pressuposto, nosso estudo trabalhou com uma pesquisa descritiva com alunos do 3º Ano do Ensino Médio de uma escola pública, em que foi analisada a resolução de todos os problemas do Enem do ano de 2018 que envolviam o conteúdo de geometria espacial.

Na discussão dos resultados, nosso trabalho objetivou a análise dos dados com base nas dificuldades dos estudantes, cujo foco esteve nas etapas de resolução dos problemas do trabalho de Brito (2006), a saber: representação; planejamento; execução e monitoramento. Para tanto, analisamos os erros e acertos da resolução da folha com as atividades devolvida ao professor. Além disso, os alunos que tiveram o maior e o menor desempenho nas resoluções foram entrevistados para que se pudesse entender melhor o raciocínio, a estratégia e a execução da resolução de suas atividades a fim de compreender as dificuldades do processo.

Finalizando, ilustramos e comentamos os resultados encontrados por meio de tabelas e figuras que revelaram o processo de resolução seguido.

O PROBLEMA E A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A resolução de problemas exige a definição de dois termos importantes, são eles: o que pode ser um problema e o segundo relacionado ao processo de resolução de um problema.

Para Chi e Glaser (1992, p. 251), “um problema é uma situação na qual você está tentando algum objetivo e deve encontrar um meio de chegar lá”.

Vemos a seguir o que Base Nacional Comum Curricular (2017) disserta sobre o problema e a resolução de problemas:

Os estudantes também precisam construir significados para os problemas próprios da Matemática. Para resolver esses problemas, eles devem, logo no início, identificar os conceitos e procedimentos matemáticos necessários ou os que possam ser utilizados, na chamada formulação matemática do problema. Depois disso, eles devem aplicar esses conceitos, executar procedimentos e, ao final, compatibilizar os resultados com o problema original, comunicando a solução aos colegas por meio de argumentação consistente (BRASIL, 2017, p. 527).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), fala sobre o desenvolvimento de novos paradigmas, sobretudo os que abordam a aprendizagem na concepção socioconstrutivista, surgindo a proposta de “problema aberto” e de “situação-problema”, sobre as quais argumenta que,

Apesar de apresentarem objetivos diferentes, esses dois tipos de problemas colocam o aluno, guardando-se as devidas proporções, em situação análoga àquela do matemático no exercício da profissão. O aluno deve, diante desses problemas, realizar tentativas, estabelecer hipóteses, testar essas hipóteses e validar seus resultados (BRASIL, 2006, p. 84).

Brito (2006, p. 17) também discorre sobre o problema e a solução de problemas:

Embora exista discordância entre os diferentes autores a respeito da definição de ‘solução de problemas’, existe concordância sobre um problema ser uma situação inicial quase sempre desconhecida que é o ponto de partida. É o contato do sujeito com essa situação inicial desconhecida que permite a ele disponibilizar, na estrutura cognitiva, os elementos necessários à solução.

Ainda sobre o ponto de vista cognitivo, o autor continua discorrendo:

[...] combinar, na estrutura cognitiva, os conceitos, princípios, procedimentos, técnicas, habilidades e conhecimentos previamente adquiridos que são necessários para encontrar a solução com uma nova situação que demanda uma reorganização conceitual cognitiva. Trata-se, portanto, de uma reorganização dos elementos já presentes

na estrutura cognitiva, combinados com os novos elementos trazidos pela nova situação (BRITO, 2006, p. 19).

Brito (2006) também defende uma síntese do processo de resolução de problemas, baseada em quatro etapas, correspondendo às seguintes: representação, planejamento, execução e monitoramento. As explicações sobre cada uma dessas etapas tiveram como referência a perspectiva de Proença (2018), conforme segue abaixo.

- **Representação:** correspondente a compreensão ou interpretação do problema que o aluno deseja solucionar. Nesta etapa, primeiramente o indivíduo realiza/constrói uma representação mental do problema. Para tanto, para a compreensão inicial do problema, utiliza-se de conhecimentos linguístico e semântico. Assim, passa-se por uma compreensão baseada na sua língua materna evidenciando a estrutura geral do problema, reconhecendo as palavras. Para o conhecimento semântico, a compreensão diz respeito sobre os termos matemáticos do problema e as relações estabelecidas entre estes termos. Em seguida, o indivíduo deve utilizar seu conhecimento esquemático. Proença (2018) evidencia este processo em tal etapa:

[...] Tal conhecimento envolve reconhecer a essência do problema com base nos conceitos e procedimentos matemáticos aprendidos anteriormente e que evidenciam sua natureza. [...] uma pessoa que consegue realizar essa etapa de representação do problema de forma adequada apresenta habilidade matemática para a compreensão da estrutura formal do problema (PROENÇA, 2018, p. 27).

- **Planejamento:** o qual implica em usar uma estratégia para resolver o problema. Esta etapa envolve o conhecimento estratégico do indivíduo do modo como se organiza e representa o problema. As estratégias fazem parte de um conjunto de conhecimentos particulares do indivíduo, dependendo de suas preferências por um caminho ou uma forma que pensa ser mais fácil de buscar a solução. Assim, o indivíduo pode usar estratégias como o uso de tabelas, tentativa e erro, entre outros. Tal etapa evidencia habilidades do indivíduo como fazer generalizações rápidas, pensar com símbolos matemáticos e abreviar processos de raciocínio matemático.
- **Execução:** Nesta, o aluno precisa executar uma estratégia proposta, revelando sua habilidade para usar o pensamento lógico nas relações quantitativas e espaciais.
- **Monitoramento:** Envolvendo dois aspectos – o primeiro diz respeito a resposta apresentada, que avalia a habilidade matemática para apresentar a solução de maneira racional. Neste, torna-se possível verificar se o indivíduo manifesta habilidade matemática para apresentar a racionalidade de uma solução. O segundo aspecto, refere-se a tarefa de rever

a resolução seguida, na qual o indivíduo pode visualizar o processo de resolução executado, avaliando sua habilidade no processo de reconstrução rápida de raciocínio matemático livre.

METODOLOGIA

Nossa pesquisa foi descritiva e envolveu alunos do 3º ano do ensino médio, período noturno, de uma escola pública do Estado do Paraná. A turma possuía 38 alunos, dos quais, 34 estavam presentes no dia da aplicação deste trabalho, que ocorreu em duas aulas de 50 minutos no dia 31 do mês de maio de 2019. As idades dos estudantes variavam de 16 a 33 anos.

Para realização das atividades, os alunos foram organizados em duplas escolhidas entre eles. Foi solicitado que resolvessem três questões do ENEM (2018), as quais envolviam os conteúdos de geometria espacial. A escolha destas questões se justifica por serem as três questões deste conteúdo na última edição do ENEM em relação ao período de realização da nossa pesquisa, e por contemplarem as competências e habilidades na área de Matemática e suas Tecnologias. Além disso, entendemos que estavam de acordo com o escopo das competências e habilidades da Base Nacional Comum Curricular, se enquadrando com nossa perspectiva teórica.

Dessa forma, para que pudéssemos aplicar as referidas questões, fizemos uma modificação, no sentido de retirar as alternativas e substituir por uma pergunta para que ganhassem a concepção de um problema, como vimos anteriormente. Nas figuras 1, 2 e 3, temos as três questões abordadas.

(Questão 140 – Adaptada) Um artesão possui potes cilíndricos de tintas cujas medidas externas são de 4 cm de diâmetro e 6 cm de altura. Ele pretende adquirir caixas organizadoras para armazenar seus potes de tinta, empilhados verticalmente com tampas voltadas para cima, de forma que as caixas possam ser fechadas. No mercado, existem cinco opções de caixas organizadoras, com tampa, em formato de paralelepípedo reto retângulo, vendidas pelo mesmo preço, possuindo as seguintes dimensões internas:

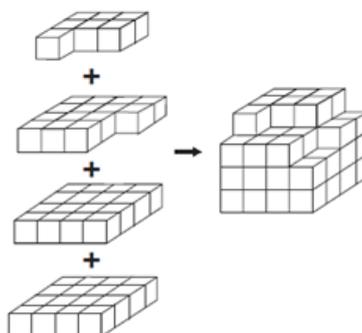
Modelo	Comprimento (cm)	Largura (cm)	Altura (cm)
I	8	8	40
II	8	20	14
III	18	5	35
IV	20	12	12
V	24	8	14

Qual destes modelos o artesão deve adquirir para conseguir armazenar o maior número de potes por caixa?

Figura 1 – Questão 1 aplicada aos alunos
Fonte: Enem 2018 – prova azul

(Questão 159 – Adaptada) *Minecraft* é um jogo virtual que pode auxiliar no desenvolvimento de conhecimentos relacionados a espaço e forma. É possível criar casas, edifícios, monumentos e até naves espaciais, tudo em escala real, através do empilhamento de cubinhos.

Um jogador deseja construir um cubo com dimensões $4 \times 4 \times 4$. Ele já empilhou alguns dos cubinhos necessários conforme a figura:

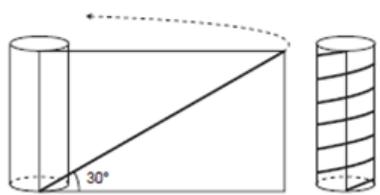


Os cubinhos que ainda faltam empilhar para finalizar a construção do cubo, juntos, formam uma peça única, capaz de completar a tarefa. Desenhe o formato da peça capaz de completar o cubo $4 \times 4 \times 4$.

Figura 2 – Questão 2 aplicada aos alunos

Fonte: Enem 2018 – prova azul

(Questão 180 – Adaptada) Para decorar um cilindro circular reto será usada uma faixa retangular de papel transparente, na qual está desenhada em negrito uma diagonal que forma 30° com a borda inferior. O raio da base do cilindro mede $\frac{6}{\pi}$ cm, e ao enrolar a faixa obtém-se uma linha em formato de hélice, como na figura.



Determine o valor (em centímetros) da altura do cilindro.

Figura 3 – Questão 3 aplicada aos alunos

Fonte: Enem 2018 – prova azul

Para análise e discussão dos resultados, baseamo-nos nas dificuldades das duplas de estudantes na resolução dos problemas com foco nas etapas (Representação, Planejamento, Execução e Monitoramento) propostas pelo trabalho de Brito (2006). Para fazê-lo, foi feita a análise de acertos e erros da folha com as atividades realizadas pelos discentes e devolvida ao professor. Além disso, foi realizada uma entrevista aberta com os alunos que tiveram o maior e o menor desempenho nas resoluções para que pudéssemos entender melhor as etapas (Representação, Planejamento, Execução e Monitoramento), a fim de compreender o êxito e as dificuldades do processo. Dessa maneira, ilustramos os êxitos e dificuldades por meio de tabelas e figuras que revelaram o processo de resolução seguido.

DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

A tabela 1 apresenta como foi o aproveitamento das 17 duplas participantes na resolução das atividades, se fizeram corretamente, parcialmente, de forma incorreta ou não fizeram.

Tabela 1 – Aproveitamento das duplas de alunos na resolução das questões

Questões	Correta	Parcialmente Correta	Incorreta	Não Respondeu
140	82%	12%	6%	0%
159	29%	12%	29%	29%
180	0%	53%	0%	47%

Fonte: Elaborada pelos autores

Na tabela 1, observamos que a questão 140 teve um grande percentual de acertos (82%), enquanto que na questão 159, (29%) responderam de forma correta, sendo que essa mesma porcentagem representa a quantidade de resoluções incorretas e os que não responderam. Já na questão 180, a maioria (53%) respondeu de forma parcialmente correta.

Em relação ao processo de resolução dos problemas, a tabela 2, mostra as dificuldades dos estudantes de nossa pesquisa nas quatro etapas de resolução elencadas pelo trabalho de Brito (2006). Os percentuais de dificuldades foram calculados com base no total de duplas que fizeram a questão citada.

Tabela 2 - Dificuldades verificadas nas etapas de resolução de problemas

Questão	Duplas que Responderam	Representação (%)	Planejamento (%)	Execução (%)	Monitoramento (%)
140	17	0	0	5,88	5,88
159	12	0	0	41,66	41,66
180	9	100	-	-	-

Fonte: Elaborada pelos autores

Pela tabela 2, observamos que a maioria das duplas teve êxito em todas as etapas da resolução do problema da questão 140. Porém, uma dupla apresentou dificuldades no processo de execução, haja vista que usaram a multiplicação e em outras a adição para realizarem o cálculo do número total de potes cilíndricos que caberiam em cada caixa, conforme a figura 4. Para a caixa I, a dupla usou o princípio multiplicativo, para a caixa III, o princípio aditivo.

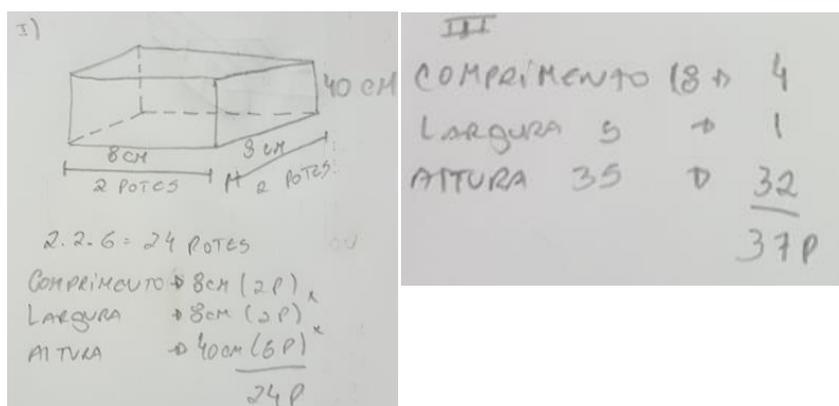


Figura 4 – Resolução apresentada por uma das duplas na questão 140
Fonte: Acervo dos autores

Em relação a questão 159, os alunos demonstram muitas dificuldades para execução, por ser uma questão que exigia visualização mental e espacial e habilidade para desenhar figuras espaciais. A figura 5 ilustra esse fato, no qual os alunos fizeram a representação da resposta na forma bidimensional e também na forma tridimensional, porém, ambas equivocadas. Tal dificuldade ocasionou um erro de 41,66% na etapa de execução.

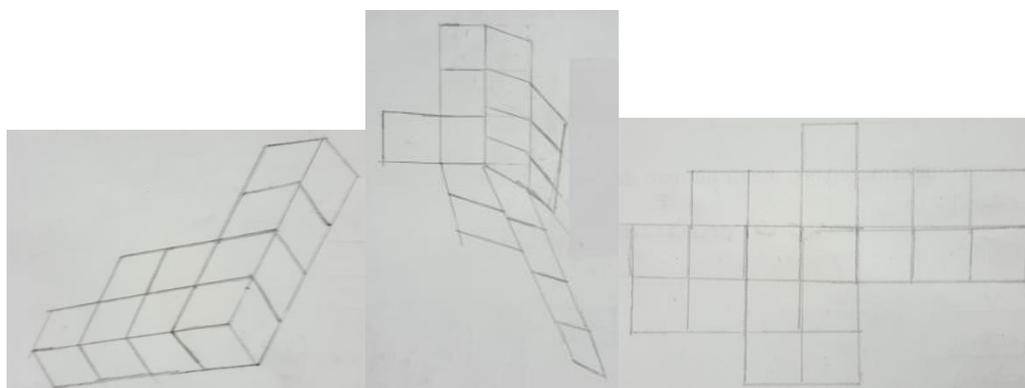


Figura 5 – Dificuldades em relação à execução da questão 159
Fonte: Acervo dos autores

A questão 180 foi a que os discentes apresentaram maiores dificuldades, pois exigia além de interpretação, manipulação algébrica com fórmulas e o conhecimento do conteúdo de trigonometria para chegar ao resultado almejado. Em tal questão, de acordo com a tabela 1, 47% das duplas não responderam e dos 53% que a fizeram, responderam de forma parcial.

A forma parcial considerada foi devida a uma dificuldade na etapa de representação em que todas as duplas que fizeram a questão deveriam ver na figura que a faixa citada no enunciado daria seis voltas no cilindro, o que não ocorreu. Devido a este fato, as etapas de

planejamento, execução e monitoramento foram comprometidas, acarretando uma resposta final incorreta.

Como estas três últimas etapas não puderam ser analisadas devido ao erro já na primeira etapa, as colocamos com um hífen na tabela 2. Assim, a etapa de representação apresentou dificuldades em 100% das duplas que fizeram a questão 180, o que ocasionou em uma resposta encontrada seis vezes menor do que a resposta correta. Isso pode ser evidenciado pela figura 6:

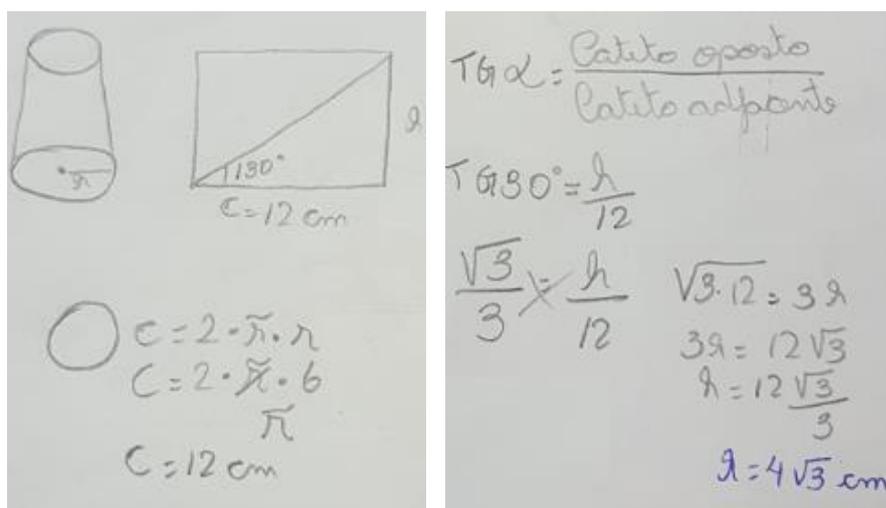


Figura 6 – Dificuldades de representação da questão 180
Fonte: Acervo dos autores

Em entrevista aberta com a dupla que teve o menor desempenho, que chamamos de dupla 1, relatou-se que na questão 159 a dificuldade presente foi em entender o enunciado, visualizar mentalmente a figura que seria a resposta e representá-la no papel: “Não entendemos todo o enunciado. [...] quando tentamos desenhar a resposta, não conseguimos”.

Na questão 180, os estudantes alegaram dificuldades de compreensão, falta de conhecimento de conteúdos prévios e dificuldades na manipulação algébrica para conseguirem fazer tal questão, por isso não a responderam. “Professor, não conseguimos compreender o enunciado. [...] não sabíamos como começar, [...] que fórmulas usar”.

Em entrevista aberta com a dupla com maior desempenho na resolução das atividades, a qual chamamos de dupla 2, os alunos afirmaram que não perceberem no enunciado da questão 180 o detalhe na figura em que a faixa dava seis voltas ao redor do cilindro e que este foi o fator determinante de não chegarem a resposta correta. “Professor, em nenhum momento percebemos esse detalhe da fita ao redor do cilindro. [...] calculamos até o final sem prestar atenção nesse erro”. Em relação às questões 140 e 159, tal dupla explicou corretamente ao

professor todo o processo adotado, verificando com êxito o cumprimento das quatro etapas propostas por Brito (2006).

CONCLUSÃO

Ao realizarmos a pesquisa com alunos do 3º ano do ensino médio noturno de uma escola pública, buscamos evidenciar as dificuldades de resolução de problemas do ENEM que envolviam o conteúdo de geometria espacial.

Verificamos que questões com maior grau de dificuldade, que exigiam dos alunos competências e habilidades em visualizações mentais de objetos espaciais, manipulação algébrica de fórmulas e conhecimentos prévios de outros conteúdos, não foram respondidas por vários estudantes, como no caso da questão 180, em que 47% não responderam (tabela 1).

A etapa que teve maior incidência de dificuldades foi a etapa de execução presente nas questões 159 e 180 (tabela 2). Além disso, na questão 180 houve dificuldades na etapa de representação com todas as duplas que a fizeram (tabela 2), o que comprometeu as etapas de planejamento, execução e monitoramento.

Sobre as entrevistas, com a dupla 1, que teve o menor desempenho na resolução das questões, verificamos que na etapa de execução os estudantes alegaram não terem entendido o enunciado da questão 159 e não souberam desenhar a resposta que necessitava de um desenho tridimensional. Além disso, afirmaram não terem compreendido o enunciado da questão 180, não sabendo quais as fórmulas utilizar e como começar. Já a dupla 2, a de maior aproveitamento evidenciou a dificuldade na etapa de representação desta questão ao afirmarem não terem se atentado ao detalhe do desenho no enunciado.

De maneira geral, verificamos nesse estudo as dificuldades também apontadas nos trabalhos de Alvarenga et al. (2016) e Araújo (2015), dificuldades estas em: interpretação e compreensão de enunciados dos problemas, dificuldades em procedimentos, em operações básicas e desconhecimento de conteúdos. Todas estas dificuldades contrapõem os objetivos esperados para resolução de problemas propostos na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM).

Em se tratando de questões do ENEM, também evidenciamos os apontamentos do trabalho de Mendes e Ribeiro (2016), no qual verificamos uma ineficiência muito grande de conteúdos por parte dos alunos, dificuldades de interpretação de enunciado e de efetuar a representação e a execução de questões que não apresentam de forma explícita o que se

deseja. Tais dificuldades também estão em contraposição com o que enuncia as competências e habilidades previstas para a prova de Matemática e suas Tecnologias do ENEM.

Contudo, nosso trabalho alcançou os objetivos de evidenciar as dificuldades de estudantes com foco nas etapas de resolução de problemas do trabalho de Brito (2006), dificuldades estas principalmente na representação e execução. Tais problemas passam pela ausência de competências e habilidades elencadas pelo ENEM, dificuldades de conteúdos, manipulação algébrica de fórmulas, entre várias, já evidenciadas em outros trabalhos. Por fim, salientamos a importância da identificação e superação dessas dificuldades. Procedimento este que passa pela formação do docente em relação às etapas da resolução de problemas até chegar ao estudante que procede estas etapas.

REFERÊNCIAS

ALVARENGA, Karly Barbosa; ANDRADE, Iris Danúbia; DE JESUS SANTOS, Ricardo. Dificuldades na resolução de problemas básicos de matemática: um estudo de caso do agreste sergipano. **Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas**, v. 12, n. 24, p. 39-52, 2016.

ARAÚJO, Natália Keli Santos. **Análise das dificuldades na resolução de problemas matemáticos por alunos do 5º ano do ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, 2015.

BRASIL, INEP. Portal. Exame Nacional do Ensino Médio – Enem: Matriz de Referência. Disponível em: <<http://portal.inep.gov.br/matriz-de-referencia>> Acesso em: 07 mar. 2019.

BRASIL, INEP. Portal. Exame Nacional do Ensino Médio – Enem: Matriz de Referência. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/artigo/-/asset_publisher/B4AQV9zFY7Bv/content/resultados-do-enem-2018-sao-divulgados/21206> Acesso em: 19 mar. 2019.

BRASIL, MEC. Portal: Políticas de Ensino Médio - PCNEM. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/component/tags/tag/33672>> Acesso em: 27 mai. 2019.

BRASIL. Secretaria de ensino fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: SEF/MEC, 1998.

BRITO, M. R. F. de. Alguns Aspectos Teóricos e conceituais da solução de problemas matemáticos. In: BRITO, M. R. F. (Org.). **Solução de problemas e a matemática escolar**. Campinas: Alínea, 2006. p.13-53.

CHI, M. T. H.; GLASER, R. A capacidade para a solução de problemas. In: STENBERG, R. **As capacidades intelectuais humanas: uma abordagem em processamento de informações**. Tradução de Dayse Batista. Porto Alegre: Artes Médicas, 1992. p. 229-275.

PROENÇA, M. C. **Resolução de Problemas: encaminhamentos para o ensino e a aprendizagem de Matemática em sala de aula.** Maringá: Eduem, 2018.

RIBEIRO, Aline Gomes; MENDES, Andréia Almeida. A dificuldade de resolução das questões de matemática do exame nacional do ensino médio: ineficiência matemática ou interpretativa?. **Anais do Seminário Científico da FACIG**, n. 2, 2017.