

UM CONVITE AOS NÚMEROS PRIMOS: O CRIVO DE ERATÓSTENES COMO OBJETO DE APRENDIZAGEM

Paulo Henrique Rodrigues
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Cornélio Procópio
prodrigues@alunos.utfpr.edu.br

Eliane Maria de Oliveira Araman
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Cornélio Procópio
elianearaman@utfpr.edu.br

Tiago Henrique dos Reis
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Cornélio Procópio
treis@utfpr.edu.br

Resumo:

Com base em pesquisas emergentes a respeito do uso de tecnologias na Educação Matemática e, também, da crescente aprovação da exploração de novas tendências metodológicas no ensino de Matemática presente nos textos oficiais do Estado do Paraná e do Brasil, este trabalho tem o intuito de apresentar o desenvolvimento de um objeto de aprendizagem que usa o algoritmo elaborado por Eratóstenes, conhecido como Crivo de Eratóstenes, a fim de introduzir ou fixar o conceito de números primos de forma lúdica e interativa. Foi realizado um estudo histórico a respeito do Crivo de Eratóstenes, tomando como base fontes secundárias e, a partir disso, foi desenvolvido um objeto de aprendizagem interativo e dinâmico programado através da plataforma Scratch. O objeto visa dar suporte para os professores dos anos finais do ensino fundamental que trabalharão este conteúdo e, além disso, ele traz uma narrativa histórica que busca despertar o interesse dos alunos que irão operá-lo.

Palavras-chave: História da Matemática. Crivo de Eratóstenes. Objeto de Aprendizagem.

Introdução

A emergente pesquisa em novas metodologias de ensino de Matemática despertou o interesse nos autores deste trabalho para desenvolver um objeto educacional de forma a englobar duas das metodologias na área de Educação Matemática: as Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC) e a História da Matemática.

O objeto, que fora desenvolvido para a aplicação através da Lousa Digital Interativa (LDI) e também de computadores, é composto de uma narrativa histórica onde o personagem apresenta um processo conhecido como “O Crivo de Eratóstenes”, desenvolvido no período pré-cristão por Eratóstenes, matemático grego da época.

No decorrer deste trabalho, são apresentados pontos importantes sobre o uso da História da Matemática e das TDIC na Educação Matemática. Além disso, ele também é

composto de uma breve biografia de Eratóstenes de Cirene, que inspirou os autores a escrevê-lo. A última seção é dedicada exclusivamente ao objeto desenvolvido, que trata alguns pontos importantes em que o professor pode interferir junto aos alunos para fomentar debates a fim de favorecer o processo de ensino e de aprendizagem.

História da Matemática na Educação Matemática

A ideia da utilização da História da Matemática na Educação Matemática foi introduzida no meio acadêmico por volta dos anos 1920, quando começaram a ser publicados artigos sobre o tema na revista americana “The Mathematics Teacher”. Contudo, num ponto de vista ingênuo, alguns autores “acabam atribuindo à história um poder quase que mágico de modificar a atitude do aluno em relação à Matemática” (MIGUEL; MIORIM, 2011, p. 16).

A presença de textos históricos em livros de apoio ao professor que ensina matemática no Brasil, conjectura-se que iniciou-se com a obra “Mathematica”, de Cecil Thiré e Mello e Souza, datada de 1931 (MIGUEL; MIORIM, 2011).

No Brasil, o uso da História da Matemática torna-se sugestão oficial do novo modelo de ensino oferecido pelo Movimento da Escola Nova, através do Decreto nº 21241 de 4 de Abril de 1932 (MIGUEL; MIORIM, 2011).

Logo no início do desenvolvimento da ideia de usar História da Matemática como recurso metodológico, autores citam como principal argumento favorável a esse uso “despertar no jovem estudante o interesse” (THIRÉ; MELLO E SOUZA, 1931, p. XV). Para eles, usar História da Matemática teria papel motivador no processo de ensino e de aprendizagem. Outros argumentos pró e contra o uso da História da Matemática na Educação surgiram no decorrer dos anos, como apontaremos ainda nesta seção.

Na década de 80, surgem nos congressos internacionais de Educação Matemática “uma nova forma de conceber a história da matemática e explicitar suas potencialidades pedagógicas” (ARAMAN, 2011, p. 76). Até então, o uso da História da Matemática na Educação era defendido com o único argumento que era o de despertar o interesse no aluno, o de usá-la como elemento motivador.

A partir deste período, discussões da relação da História da Matemática com o processo de ensino e de aprendizagem de Matemática ficaram mais intensas e começaram a abranger um leque maior de possibilidades.

Uma dessas possibilidades surge por meio de uma experiência desenvolvida por Paulus Gerdes, que

[...] propõe estratégias históricas para a construção de uma Matemática e de uma educação matemática emancipadoras, com base no estímulo à autoconfiança do povo moçambicano em sua capacidade para desenvolver matemática (MIGUEL; E MIORIM, 2013, p. 25).

A reconstrução dos fatos históricos proposta por Gerdes, faz com que a História da Matemática fique intimamente ligada com as questões da Etnomatemática, quebrando bloqueios psicológicos através do processo de inclusão social.

Essa questão da relação História da Matemática com a Etnomatemática pode ser vista no argumento de que

a história, juntamente com o enfoque da etnomatemática, auxiliam na compreensão da matemática como uma criação humana, como uma manifestação cultural e social, como um conhecimento dinâmico que se desenvolve, também, em meio às questões sociais de cada época. (ARAMAN, 2011, p. 79)

Outro argumento utilizado é o de que estudar Matemática através dos fatos históricos é capaz de desmistificá-la, ou ainda evitar alguns equívocos “como o de que o conhecimento matemático é feito por alguns poucos gênios dotados, portanto restrito a uma minoria privilegiada” (ARAMAN, 2011, p. 82).

Contudo, há argumentos que problematizam o uso da História da Matemática, que na maior parte dos casos fazem menção “à ausência de literatura adequada, à natureza imprópria da literatura disponível, à história como um fator complicador, à ausência de sentido de progresso histórico” (MIGUEL; MIORIM, 2013, p. 63).

Outros argumentos a respeito dos problemas de utilizar da História da Matemática como recurso metodológico, como menciona Araman (2011), podem ser vistos em Tzanakis e Arcavi (2000), tais como “a história pode confundir o aluno em vez de esclarecer” ou “muitos alunos não gostam de história, conseqüentemente não gostam de história da matemática” (ARAMAN, 2011, p. 88).

Esses argumentos citados não devem tornar inviável o uso da História da Matemática. Mesmo que existam essas dificuldades, como sugerem Miguel e Miorim (2013, p. 67), “somente essa iniciação escolar pedagogicamente adequada constitui a condição necessária, ainda que não suficiente, para a superação gradativa desses obstáculos”.

Como apresentado nesta seção, existem inúmeras formas de usar a História da Matemática como recurso metodológico, como fator desmistificador e esclarecedor do

conhecimento matemático. Para isso, é necessário que seja feito um preparo pedagógico das aulas, tal como produção de material adequado para dar suporte aos alunos, além de formação do professor no que diz respeito ao conhecimento histórico e matemático.

O Crivo de Eratóstenes

Eratóstenes, de acordo com Boyer (1974), nascido em Cirene, dentre outras proficiências era matemático e astrônomo. Foi contemporâneo de Arquimedes e Aristarco. Ficou famoso por medir a circunferência da Terra mas também deixou contribuições em diversas áreas da matemática.

Ele desenvolveu um algoritmo capaz de isolar os números primos que ficou conhecido como “crivo de Eratóstenes”. O crivo consiste em

Com todos os números naturais dispostos em ordem, simplesmente são cancelados os números de dois em dois seguindo o dois, de três em três (na sequência de partida) seguindo o três, de cinco em cinco seguindo o cinco, e continua-se assim a cancelar cada n -ésimo número seguindo o número n . Os números restantes, de dois em diante, serão, é claro, primos (BOYER, 1974, p. 117).

Em outras palavras, Eratóstenes sugere que eliminemos os números divisíveis por dois, três, cinco, sete, e assim por diante, até que sobrem apenas os números primos.

Uma característica do Crivo de Eratóstenes é que só precisamos fazer o teste dos números até a raiz quadrada do maior número da sequência, ou seja, se tomarmos uma sequência de cem números, devemos pegar os múltiplos de 2 até $\sqrt{100} = 10$. Vide Proposição 1.

Proposição 1: Seja n composto. Então existe um primo p tal que $p|n$ e $p \leq \sqrt{n}$.

Demonstração: De fato, seja n composto, então $n = ab$.

Suponha por absurdo que $a > \sqrt{n}$ e $b > \sqrt{n}$.

Temos então $n = ab > \sqrt{n}\sqrt{n} = n$, o que é uma contradição.

Logo $a \leq \sqrt{n}$ ou $b \leq \sqrt{n}$.

Portanto, todo primo p que divide n satisfaz a relação $p \leq a \leq \sqrt{n}$, o que prova o resultado.

Note que todos os compostos menores que \sqrt{n} serão testados manualmente. Tome um número $a = pk$, com $p \leq \sqrt{a} \leq \sqrt{n}$ e $k \in \mathbb{Z}$, com p primo. Pela Proposição 1, garante-se que esse número será excluído pelo crivo pois será múltiplo de algum primo $p \leq \sqrt{n}$.

De fato, a escolha do Crivo para o desenvolvimento do objeto de aprendizagem tratado neste trabalho não foi arbitrária. Um dos principais motivos pelo qual optamos escolhê-lo foi a simplicidade com que o problema foi apresentado e resolvido por Eratóstenes e também por conta de números primos ser um “conceito matemático apresentado no 6º ano do Ensino Fundamental” (RIBEIRO; SCHERER; TOILLIER, 2014, p. 01), visando desconstruir o argumento de que o uso da História da Matemática é impróprio ou inviável na Educação Básica. Além disso, a utilização desse fato histórico se fez necessário “na busca de referências para compreender melhor os conceitos matemáticos” (PARANÁ, 2008, p. 66).

O uso do Crivo de Eratóstenes para introduzir os conceitos de números primos, múltiplos e divisores, acaba trilhando um caminho natural na construção do conhecimento matemático a partir de uma situação-problema real, de forma com que a História direcione as explicações dos conceitos citados acima.

As TDIC na Educação Matemática

O avanço da tecnologia e da comunicação na sociedade moderna favorece o surgimento de novos recursos para o ensino e para a aprendizagem. Em especial, o uso do computador como recurso didático para o ensino de Matemática é discutido por diversos educadores da área e faz com que isso se torne uma grande tendência metodológica (LANGNER, 2016).

Como qualquer outra tendência emergente, surgem especulações sobre os prós e contras de usar de fato as TDIC como ferramenta de ensino. O mal uso do computador, por exemplo, pode desfavorecer a aprendizagem do aluno. Isso ocorre se o aluno apenas operar a máquina sem precisar desenvolver o raciocínio matemático, ou seja, o computador fará a parte pesada e o aluno deixará de desenvolver a sua inteligência (BORBA; PENTEADO, 2012).

Outro problema que pode ser considerado é o preparo do professor para o desenvolvimento de recursos a serem aplicados com a mediação da tecnologia. Assim, o maior desafio para efetivar o uso das TDIC no ensino de Matemática é a capacitação dos professores (LANGNER, 2016).

Na perspectiva de Borba e Penteadó (2012, p. 17), “o computador deve estar inserido em atividades essenciais, tais como aprender a ler, escrever, compreender textos, analisar gráficos, contar, desenvolver noções espaciais, etc”. O ensino da Geometria, por exemplo, pode ser favorecido com o uso de softwares específicos, como o GeoGebra, que possui ferramentas potentes para elucidar conceitos matemáticos.

As possibilidades que as TDIC trazem são incontáveis e dependem da criatividade do professor e dos recursos disponíveis, visto o surgimento de novas tecnologias como a Lousa Digital Interativa.

Objetos de Aprendizagem para ensinar Matemática

O conceito de objeto de aprendizagem (OA) ganha significado com o uso das TDIC na educação, o que foi discutido anteriormente. Na maior parte das vezes eles são associados ao uso do computador e da *Internet* (AUDINO; NASCIMENTO, 2010).

Afinal, o que são e para que servem os OA? Segundo, Audino e Nascimento (2010, p. 130):

Os objetos de aprendizagem podem ser encarados como materiais importantes no processo de ensino e aprendizagem, pois nos fornecem a capacidade de simular e animar fenômenos, entre outras características, assim como, reutilizá-los em vários outros ambientes de aprendizagem.

Atualmente, existem inúmeros repositórios que contém OA desenvolvidos por professores, pesquisadores e estudantes, cujo acesso é gratuito assim como a sua disponibilidade para *download*. Podemos citar alguns repositórios, como o Portal do Professor¹ e o RIVED².

No ensino de Matemática, um objeto de aprendizagem pode ser visto como um meio de elucidar e demonstrar conceitos. Para exemplificar, fora desenvolvido para este trabalho um objeto cuja finalidade é trabalhar o conceito de números primos, baseado no Crivo de Eratóstenes. A construção deste OA foi feita com o auxílio do software Scratch. O objeto é composto de uma narrativa histórica cuja personagem é um esquilo denominado Alfred, que interage com os alunos, inicialmente apresentando a história de Eratóstenes e de seu crivo.

¹ Link para acesso: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnica.html?id=19559>

² Link para acesso: <http://rived.mec.gov.br/>



Figura 1: Alfred apresenta Eratóstenes

Na sequência, Alfred ensina aos alunos como funciona o algoritmo do crivo e apresenta na tela uma tabela numerada de um a quarenta, uma adaptação do crivo original.

O aluno, por sua vez, é convidado a interagir com o OA, selecionando um número. Caso o aluno selecione o número correto, esse número é retirado da tabela.

01	02	03	04	05	06	07	08
09	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40

Figura 1: Crivo adaptado para o objeto.

Com isso, por meio dos conceitos de múltiplos e divisores, os alunos excluem todos os números compostos da tabela, restando apenas os números primos, seguindo o mesmo raciocínio de Eratóstenes. Vale ressaltar que o objeto de aprendizagem não substitui o papel do professor, que deve no decorrer da animação intervir com algumas observações que podem ser importantes. Uma pergunta do tipo “Por que não precisamos excluir os múltiplos de seis?”, por exemplo, pode ser uma porta aberta para uma discussão sobre múltiplos e divisores comuns a dois e três.

No decorrer da animação, Alfred faz a seguinte pergunta “Você concorda que os números restantes são todos primos?”. Cabe aqui uma intervenção do professor, o qual pode

propor uma discussão com os alunos sobre os motivos dos números restantes serem primos, mesmo sabendo que esse motivo será explicitado no restante da animação. Caso o aluno responda sim, o esquilo o parabeniza e enfatiza que os números encontrados são primos. Caso contrário, ele explica o motivo pelo qual os números são primos e assim encerra a animação do OA.



Figura 2: Pergunta final.

O objeto de aprendizagem oferece ao professor um suporte para introduzir, elucidar ou fixar os conceitos de múltiplos, divisores e de números primos além de buscar amparo à História da Matemática visando despertar o interesse nos alunos e fazê-los questionar sobre como foi possível para Eratóstenes criar esse mecanismo com tão poucos recursos na época. Fica a cargo do professor preparar uma aula da forma que lhe for mais conveniente para a aplicação deste objeto, de acordo com os seus objetivos e a série que atua.

Considerações Finais

O uso planejado das ferramentas desenvolvidas com o amparo das TDIC para serem utilizadas nas aulas de Matemática possibilita ao professor uma abordagem mais lúdica e interativa do conteúdo a ser estudado. Os objetos de aprendizagem, especificamente, permitem uma participação maior do aluno no próprio processo de aprendizagem, partindo da interação do mesmo com o objeto. Sendo assim, faz-se importante o uso dessas ferramentas tecnológicas para novas avaliações do processo de ensino e aprendizagem dos alunos.

Além disso, desenvolver um Objeto de Aprendizagem aliado a História da Matemática pode suscitar questões relevantes que podem ser aproveitadas pelo professor, como exemplificadas, de acordo com o nível de escolarização no qual atua.

Como se trata de uma pesquisa ainda em desenvolvimento, nas próximas etapas, este objeto de aprendizagem será aplicado com professores e futuros professores de matemática para sua avaliação e ajustes necessários. Depois disso, será a fase de aplicação junto aos estudantes da Educação Básica.

Agradecimentos

Os autores agradecem a UTFPR pelo apoio financeiro recebido na realização dessa pesquisa.

Referências

- ARAMAN, E. M. O. **Contribuições da história da matemática para a construção dos saberes do professor de matemática**. 2011. 238 f. Tese (Doutorado em Ensino de Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2011.
- AUDINO, D. F.; NASCIMENTO, R. S. Objetos de Aprendizagem – Diálogos entre conceitos e uma nova proposição aplicada à educação. **Revista Contemporânea de Educação**, [S. l.], v. 5, n. 10, fev. 2012. ISSN 1809-5747. Disponível em: <<https://revistas.ufrj.br/index.php/rce/article/view/1620/1468>>. Acesso em: 28 Abr. 2017.
- BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2012.
- BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.
- LANGNER, A. **Uma abordagem para o ensino de funções polinomiais de grau maior que dois com auxílio do software graphmatica**. 2016. XX f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procopio. 2016.
- MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História na Educação Matemática: propostas e desafios**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011.
- RIBEIRO, D. M.; SCHERER, A. C. S.; TOILLIER, J. S. **Números Primos e Suas Histórias** In: XII ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XII, 2014, Campo Mourão. Anais... Campo Mourão: Universidade Estadual do Paraná, 2014.
- THIRÉ, C.; MELLO E SOUZA, J. C. **Mathemática: 1º e 2º anos**. 1ª edição. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1931.