

## SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES: UMA EXPERIÊNCIA EM UM CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Angela Marta Pereira das Dores Savioli  
Universidade Estadual de Londrina  
angelamartasavioli@gmail.com

Kátia Socorro Bertolazi  
Instituto Federal do Paraná – Londrina  
katia.bertolazi@ifpr.edu.br

### **Resumo:**

Este artigo apresenta o relato de experiência de uma prática pedagógica realizada em uma turma do quarto ano de um curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade paranaense envolvendo o conteúdo de Sistemas de Equações Lineares. Foi aplicado um instrumento didático com sete questões relativas a Sistemas de Equações Lineares, contemplando abordagens algébrica, geométrica e aplicações. As produções escritas discentes foram relatadas e interpretadas, buscando elencar dificuldades e desafios no processo de resolução das questões. Concluiu-se que a maioria dos estudantes demonstrou dificuldades na interpretação geométrica de sistemas de equações lineares  $3 \times 3$  e na interpretação de enunciados que requerem a construção algébrica de um sistema linear, bem como em aplicações de sistemas lineares. Contudo, na abordagem geométrica de sistemas  $2 \times 2$  e quanto a conhecimentos a respeito de métodos de resolução dos mesmos, tais como processos de substituição ou adição, houve indícios que demonstram aprendizagens e compreensões adequadas. Destaca-se ainda que as questões articulando aspectos algébricos, e geométricos envolvendo o tratamento de sistemas de equações lineares colaboraram para ampliar compreensões de conceitos matemáticos, além de fomentar reflexões e conscientização de percursos formativos pessoais e docentes.

**Palavras-chave:** Educação Matemática. Sistemas de Equações Lineares. Formação Docente.

### **Introdução**

Sistema de Equações Lineares consiste em um conteúdo relevante para a Matemática e outros domínios científicos, tais como a Biologia e setores industriais apresentando aplicações diversas, e muitas delas pouco conhecidas. De pensamento algébrico a circuitos elétricos temos os sistemas lineares como recurso teórico-metodológico que favorecem ao entendimento de fenômenos que ocorrem nos mais diversos contextos científicos. Do GPS ao balanceamento químico, lá está de novo o sistema linear atuando. Assim, torna-se relevante que o (a) futuro (a) professor (a) de Matemática tenha noção das potencialidades científicas desse conteúdo matemático, para além de sua definição e métodos de resolução.

Assim, neste relato, apresentamos uma experiência realizada em uma turma de quarto ano de um Curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade paranaense com

questões abordando sistemas de equações lineares, e uma análise descritivo-interpretativa de dificuldades encontradas. Segundo Lajoie (2009, p. 45), existem duas perspectivas para a palavra dificuldade: a primeira trata de dificuldades envolvidas com tarefas ou conceitos; isso é chamado obstáculo ou barreira. A segunda incide em relação ao desconforto experimentado por uma pessoa em uma situação complexa; isso é chamado de confusão, problema.

Desse modo, propomos questões contemplando contextos de representação e compreensão geométrica no intuito de explorar significados conceituais e mecanismos de visualização, os quais são coerentes com processos cognitivos associados ao pensamento algébrico.

### **Aspectos algébricos, geométricos e aplicações de Sistemas de Equações Lineares**

Livros didáticos que abordam o conceito de sistemas de equações lineares raramente trazem algum tratamento da parte geométrica, principalmente a de sistemas lineares  $3 \times 3$ . Além disso, poucos apresentam problemas que promovam reflexões a respeito desse conteúdo matemático. Os métodos de resolução são praticamente “decorados” pelos estudantes que, muitas vezes, não têm noção do que fazer com as respostas obtidas. Destacamos que:

Provavelmente o problema mais importante na Matemática é o da resolução de um sistema de equações lineares. Mais de 75% de todos os problemas matemáticos encontrados em aplicações científicas e industriais envolvem a resolução de um sistema linear em algum estágio. Usando métodos modernos da matemática, é frequentemente possível reduzir um problema sofisticado a um simples sistema de equações lineares. Os sistemas lineares aparecem em aplicações em áreas como negócios, economia, sociologia, ecologia, demografia, genética, eletrônica e física (LEON, 2011, p.1).

Um *Sistema de Equações Lineares* é definido como sendo uma coleção finita de equações lineares, que pode simplesmente ser denominado de sistema linear. Conforme Anton e Busby (2006), “as variáveis de um sistema linear são denominadas incógnitas” (p.59). Para complementar tal explicação se faz necessário a definição matemática de uma *equação linear*, a qual pode ser expressa na forma “ $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ ”, em que os coeficientes  $a_1, a_2, \dots, a_n$  são constantes, mas nem todos nulos; já  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são ditas incógnitas, e o termo independente  $b$  é considerado uma constante. As incógnitas ocorrem somente na primeira potência e não aparecem como argumentos de funções trigonométricas, logarítmicas ou exponenciais. No caso específico em que  $b = 0$ ,  $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0$  é denominada *equação linear homogênea*.

Considerando essas informações a respeito de sistemas de equações lineares, adaptamos o instrumento de Bertolazi (2012), reduzindo-o para sete questões, visando investigar como os estudantes participantes entendem o conceito de sistemas de equações lineares, suas abordagens e aplicações. Bertolazi (2012) abordou em sua dissertação o conceito de sistemas de equações lineares e analisou a produção escrita dos participantes de sua pesquisa segundo os processos matemáticos de representação e abstração de Dreyfus (1991).

A *representação* e *abstração* são dois processos considerados eficientes por Dreyfus (1991) para se construir e gerenciar pensamento matemático avançado. Em relação aos processos relacionados à representação temos alguns possíveis de serem identificados, tais como os processos de: definir, classificar, reconhecer e manipular símbolos, verificar, modelar, visualizar. Quanto aos processos relacionados à abstração associam-se as capacidades de generalizar, formalizar e sintetizar. Tais processos são tidos como fundamentais para se inferir a presença de manifestações efetivas de pensamento matemático avançado.

As Orientações Curriculares do Ensino Médio (OCEM) de 2006, sugerem recomendações quanto ao tratamento matemático a ser desenvolvido em relação aos Sistemas de Equações Lineares. Conforme tal documento,

No estudo de sistemas de equações, além de trabalhar a técnica de resolução de sistemas, é recomendável colocar a álgebra sob o olhar da geometria. A resolução de um sistema  $2 \times 2$  de duas equações e duas variáveis pode ser associada ao estudo da posição relativa de duas retas no plano. Com operações elementares simples, pode-se determinar a existência ou não de soluções desse sistema, o que significa geometricamente os casos de intersecção/coincidência de retas ou paralelismo de retas. A resolução de sistemas  $2 \times 3$  ou  $3 \times 3$  também deve ser feita via operações elementares (o processo de escalonamento), com discussão das diferentes situações (sistemas com uma única solução, com infinitas soluções e sem solução). Quanto à resolução de sistemas de equação  $3 \times 3$ , a regra de Cramer deve ser abandonada, pois é um procedimento custoso (no geral, apresentado sem demonstração, e, portanto de pouco significado para o aluno), que só permite resolver os sistemas quadrados com solução única. Dessa forma, fica também dispensado o estudo de determinantes (OCEM, 2006, p.77-78).

É relevante destacar que esse documento OCEM (2006) não orienta ou sugere tratamento matemático de caráter geométrico para Sistemas de Equações Lineares  $3 \times 3$ , como se faz para o sistema de ordem 2. Da citação anterior, o fato evidente consiste no reforço do tratamento algébrico para sistemas lineares de ordem 3, com ênfase no processo de

escalonamento. Defendemos a utilização de atividades que requerem tratamento geométrico aliado ao algébrico para oportunizar a ampliação de compreensão de conceitos e significados a respeito desse tema, pois tais desenvolvimentos poderiam contribuir para minimizar dificuldades durante os processos de ensino e de aprendizagem.

Aqui, em virtude do espaço do qual dispomos, enfocaremos o relato da aplicação das questões escolhidas, e apresentaremos uma análise descritivo-interpretativa de registros escritos obtidos de um grupo de dezoito participantes.

As questões aplicadas aos participantes foram as seguintes:

### QUESTÃO 01

Quando você pensa em Sistemas de Equações Lineares, que termos têm a ver com esse conteúdo? Assinale.

- |   |   |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> Equações                 | <input type="checkbox"/> Frações parciais                     |
| <input type="checkbox"/> Planos                   | <input type="checkbox"/> Matriz identidade                    |
| <input type="checkbox"/> Retas                    | <input type="checkbox"/> Construção de parábola               |
| <input type="checkbox"/> Igualdades               | <input type="checkbox"/> Vetores                              |
| <input type="checkbox"/> Desigualdades            | <input type="checkbox"/> Balanceamento químico                |
| <input type="checkbox"/> Determinante             | <input type="checkbox"/> Escalonamento                        |
| <input type="checkbox"/> Matriz                   | <input type="checkbox"/> Método de eliminação de Gauss        |
| <input type="checkbox"/> Incógnitas               | <input type="checkbox"/> Posto de matriz                      |
| <input type="checkbox"/> Plano Cartesiano         | <input type="checkbox"/> Variáveis                            |
| <input type="checkbox"/> Relações de equivalência | <input type="checkbox"/> Intersecção de retas                 |
| <input type="checkbox"/> Geometria analítica      | <input type="checkbox"/> GPS                                  |
| <input type="checkbox"/> Alocação de recursos     | <input type="checkbox"/> Interpolação polinomial              |
| <input type="checkbox"/> Matriz inversa           | <input type="checkbox"/> Álgebra linear                       |
| <input type="checkbox"/> Regra de Cramer          | <input type="checkbox"/> Análise de redes                     |
| <input type="checkbox"/> Pensamento algébrico     | <input type="checkbox"/> Método de eliminação de Gauss-Jordan |
| <input type="checkbox"/> Circuitos elétricos      | <input type="checkbox"/> Coordenadas cartesianas              |

Os termos dessa “**Questão 1**” foram selecionados com a intenção principal de conhecer se os participantes possuem noções gerais da temática, se compreendem termos relacionados às aplicações do conteúdo em questão, e se estabelecem relações entre conceitos e conteúdos matemáticos de diferentes disciplinas.

### QUESTÃO 02

(A). Em quais épocas escolares você estudou Sistemas de Equações Lineares? Relate sua experiência de forma detalhada sobre esse conteúdo.

(B). Existe diferença da abordagem da Educação Básica para a do Ensino Superior sobre o conteúdo de Sistemas de Equações Lineares? Explique.

A “**Questão 2 – item A**” tem por objetivo resgatar lembranças escolares, e por meio desses relatos de vivências formativas se recordam detalhes a respeito da compreensão pessoal envolvendo o estudo de Sistemas de Equações Lineares. E por outro lado, se fomentam no

“item B” conexões que estabeleçam diferenças quanto ao tratamento do conteúdo em questão, em diferentes etapas de formação, isto é, em contextos da Educação Básica e do Ensino Superior.

**QUESTÃO 03**

O que é um Sistema de Equações Lineares?

A “Questão 3” tem por finalidade valorizar o processo de compreensão da definição do conceito matemático. Isso se configura como aspecto relevante no processo de ensino e de aprendizagem matemática, uma vez que explicita elementos que permitem reconhecimento, identificação e entendimento a respeito de características matemáticas pertinentes ao tema proposto.

**QUESTÃO 04**

Quando se trata de Sistemas de Equações Lineares são considerados alguns métodos de solução, tais como: substituição, comparação, adição, escalonamento, resolução matricial, Regra de Cramer, entre outros. Relate suas ideias, experiências, dúvidas e compreensões a respeito desses métodos.

A “Questão 4” busca fomentar o desenvolvimento de pensamento matemático avançado a luz de Dreyfus (2002), isto é, a capacidade de sintetizar, relacionar conceitos e procedimentos, além de distinguir o entendimento de que situação e/ou segmento de ensino, um método de resolução torna-se mais favorável em detrimento de outro.

**QUESTÃO 05**

(POOLE, 2004, adaptado) Analise os gráficos apresentados a seguir. Descreva a posição apresentada pelas retas nas figuras que se seguem, e a partir dessa descrição, considere que as retas representem soluções de sistemas de equações lineares  $2 \times 2$ . Indique qual seria a classificação do sistema: sistema possível e determinado (SPD), sistema possível e indeterminado (SPI) e sistema impossível (SI). Justifique suas escolhas.

Figura <sup>1</sup>	Descrição da figura Posição das retas	Classificação do Sistema	Justificativa de sua escolha

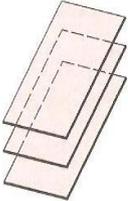
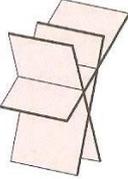
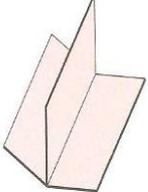
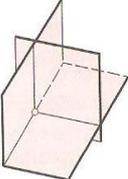
<sup>1</sup> As figuras foram retiradas de POOLE, David. *Álgebra Linear*. São Paulo: Thomson, 2004. p.58.


A “**Questão 5**” aborda a discussão da solução de sistemas de equações lineares  $2 \times 2$  com enfoque em tratamento geométrico, quando envolve o estudo de variáveis contínuas. É comum tal apresentação geométrica em livros didáticos utilizando a representação de retas no plano cartesiano. Entretanto, não há discussão de tal representação em contextos que abordam o estudo de fenômenos relativos a variáveis discretas. Desse modo, o objetivo dessa questão é propor essa discussão, ou seja, instigar o processo de reflexão referente às tradições de apresentações teóricas enfatizadas por livros didáticos de Matemática.

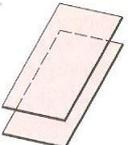
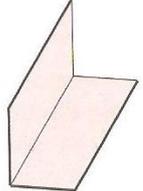
#### QUESTÃO 06

Segundo Ferreira e Gomes (1996), nos sistemas de equações lineares  $3 \times 3$  da forma: (1)  $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ ; (2)  $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ ; (3)  $a_3x + b_3y + c_3z = d_3$ ; as equações (1), (2), (3) representam planos  $\pi_1, \pi_2$  e  $\pi_3$  no espaço tridimensional. As possibilidades para as posições dos três planos são oito. Quanto à classificação da solução de sistemas de equações lineares, estes podem ser: sistema possível e determinado (SPD), sistema possível e indeterminado (SPI) e sistema impossível (SI). Descreva a posição apresentada pelos planos nas figuras que se seguem, e a partir dessa descrição, considere que os planos representem soluções de sistemas de equações lineares  $3 \times 3$ ; indique qual seria a classificação

do sistema: sistema possível e determinado (SPD), sistema possível e indeterminado (SPI) e sistema impossível (SI). Justifique suas escolhas.

Figura <sup>2</sup>	Descrição da figura Posição dos planos	Classificação do Sistema	Justificativa de sua escolha
			
			
			
			
			
			

<sup>2</sup> As figuras dos planos foram retiradas de ANTON, Howard; BUSBY, Robert C. *Álgebra Linear Contemporânea*. Porto Alegre: Bookman, 2006. p.61.

A “**Questão 6**” tinha por objetivo identificar indícios de conhecimentos matemáticos dos participantes mediante a proposição da tarefa de interpretação geométrica para sistemas de equações lineares  $3 \times 3$ , uma vez que essa abordagem geométrica é praticamente inexistente em livros didáticos de Matemática. Bertolazi (2012) destaca que encontrou tal representação em Lima (1993), em uns trabalhos voltados ao aperfeiçoamento em serviço de professores de Ensino Médio originando o livro “Coordenadas no Espaço”; na obra de Dante (2004) “Matemática Contexto e Aplicações – Volume Único” direcionado a estudantes do Ensino Médio, trabalho esse considerado como referência para esse segmento de ensino. No contexto do Ensino Superior, a autora afirma que no livro de Anton e Busby (2006), com ênfase em Álgebra Linear, é apresentada essa abordagem geométrica para o estudo de Sistemas de Equações Lineares de ordem 3.

#### QUESTÃO 07

(POOLE, 2004, p.109) Um comerciante de café vende três misturas de grãos. Um pacote com a “mistura da casa” contém 300 gramas de café colombiano e 200 gramas de café tostado tipo francês. Um pacote com a “mistura especial” contém 200 gramas de café colombiano, 200 gramas de café queniano e 100 gramas de café tostado tipo francês. Um pacote com “mistura gourmet” contém 100 gramas de café colombiano, 200 gramas de café queniano e 200 gramas de café tostado tipo francês. O comerciante tem 30 quilos de café colombiano, 15 quilos café queniano e 25 quilos de café tostado tipo francês. Se ele desejar utilizar todos os grãos de café, quantos pacotes de cada mistura devem se preparar?

A “**Questão 7**” apresenta enunciado não-convencional, o qual exige leitura e análise detalhada das informações para organizar a elaboração de um sistema de equações lineares que permita solucionar o problema. A finalidade dessa questão configura em conhecer indícios de pensamento matemático avançado que corroboram para o reconhecimento de processos característicos de sintetização e de abstração matemática, conforme Dreyfus (1991), por meio

de seleção e coordenação de ideias entre grandezas, representações algébricas, gerenciamento de conceitos e procedimentos matemáticos necessários para resolver o problema.

### **Resultados e discussões**

As análises descritivo-interpretativas evidenciam que nenhum dos participantes assinalou todas as opções da primeira questão, haja vista que todas as termologias elencadas nessa questão apresentam relações conceituais e/ou aplicações associadas a contextos que envolvem sistemas lineares. Isso demonstra ausência de conhecimentos matemáticos a respeito de aplicações relativas a sistemas de equações lineares, restringindo suas respostas a termos muito ligados aos abordados em livros didáticos, tais como escalonamento, matriz e regra de Cramer.

Quanto à parte geométrica, poucos conseguiram interpretar sistemas lineares  $3 \times 3$ , apresentando muitas dificuldades, no sentido de Lajoie (2009). A utilização de planos, interseção de planos e a proposição de se estabelecer relações conceituais entre posição e classificação de um sistema de ordem 3, causou estranheza para os estudantes participantes, mesmo esses já tendo passado por disciplinas de Geometria Analítica. Alguns conseguiram entender a parte geométrica de sistemas lineares de ordem 2, mas mesmo assim, houve a manifestação de indícios de imprecisões e dúvidas conceituais.

A Questão 7 que demandava a diferenciação, interpretação, organização de dados e a elaboração de um modelo algébrico para resolvê-la apresentou um índice muito baixo de acertos, isto é, dois dos dezoito participantes demonstraram compreensão adequada do enunciado, e obtiveram êxito em suas resoluções. Alguns demonstraram reconhecer a necessidade de formalizar um sistema de equações, entretanto erraram o processo de elaboração do sistema, construindo um sistema que não se adequava à resolução da questão. Muitos nem tentaram elaborar o sistema, demonstrando não conseguirem interpretar o que o enunciado solicitava. Outros elaboraram um sistema, somaram os coeficientes, obtiveram uma equação e igualaram-na à quantidade de cada tipo de café. Houve ainda alguns participantes que organizaram o sistema, mas resolveram de maneira inadequada, obtendo resultados com valores negativos. Apenas dois estudantes resolveram o problema, um deles ainda cometeu erro de um cálculo. Ou seja, os estudantes, mesmo estando no quarto ano de um Curso de Licenciatura em Matemática, ainda não dominam parte dos conteúdos dos quais serão exigidos durante sua futura atuação profissional.

No caso da experiência relatada aqui, a docente responsável pela disciplina, primeira autora desse trabalho, aproveitou para realizar uma reflexão com os estudantes, pois muitos se sentiram incomodados e “abalados” emocionalmente por não conseguirem resolver as questões propostas. Isso proporcionou, para a maioria dos participantes, a oportunidade e uma espécie de conscientização acadêmico-profissional para iniciarem o processo de busca, e por extensão o entendimento de conteúdos e aplicações referentes ao contexto de sistemas de equações lineares. Destacamos ainda que dentre os participantes que se propuseram a desenvolver soluções, raros utilizaram o escalonamento, preferindo o método da substituição.

### **Considerações Finais**

A abordagem descontextualizada, encontrada em muitos livros didáticos que tratam do assunto de sistemas de equações lineares, não contempla aspectos essenciais que estão por traz do conceito de sistemas de equações lineares. Dessa forma, a aprendizagem foca no processo tecnicista do conceito, ou seja, em decorar métodos de resolução e não em refletir se a resposta obtida no processo de solução do sistema se adequa ao problema proposto. A interpretação de enunciados também se constitui em uma dificuldade formativa para os estudantes participantes. Não estão familiarizados com problemas ou situações problema e, sim, com o famoso “bordão livresco”, ou seja, *resolva o sistema linear*.

Outro ponto de destaque é a desconexão entre os conteúdos das disciplinas. Se esses participantes estudaram em Geometria Analítica tal conteúdo e precisam dele em outra disciplina, raramente estabelecem alguma relação, fato que pode evidenciar indícios de abordagens pedagógicas com enfoque sistemático em técnicas procedimentais em detrimento de compreensão conceitual, e reflexões referentes às aplicabilidades. A ausência de entendimento de interseção de planos comprometeu as respostas dadas na questão referente ao tratamento de sistemas de ordem 3.

Finalmente, destacamos que a experiência valeu pelo processo de conscientização que os participantes manifestaram após a aplicação: sentiram-se fragilizados tanto em aspectos cognitivos quanto emocionais, pois acreditavam que sabiam muito a respeito de sistemas de equações lineares; e o mais impactante, sentiram-se motivados a buscar meios para resolver suas dificuldades formativas.

Uma sugestão que deixamos aqui para futuras investigações consiste em aprofundar os estudos na área da presente temática em busca de propor soluções para enfrentarmos os

desafios inerentes ao processo de se articular aspectos algébricos, geométricos e linguístico-simbólicos associados ao tratamento de Sistemas de Equações Lineares. Além disso, é necessário desenvolver materiais didáticos que contribuam para a formação docente com ênfase em atividades que estimulem, e fomentem práticas formativas visando a construção e a autonomia de pensamento matemático crítico-reflexivo.

## Referências

BERTOLAZI, K. S. **Conhecimentos e compreensões revelados por estudantes de Licenciatura em Matemática sobre sistemas de equações lineares**. 2012. 227 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática – Universidade Estadual de Londrina). 2012.

BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Volume 2. Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC, 2006.

DREYFUS, T. Advanced mathematical thinking processes. In: D. Tall (Ed.), **Advanced Mathematical Thinking** (pp. 25-41). Dordrecht: Kluwer, 1991.

LAJOIE, C. **Difficultés Liées aux premiers apprentissages en theories des groupe**. Thèse présentée à la Faculté des études supérieure de l'Université Laval, 358p. 2009.

LEON, Steven J. **Álgebra Linear com aplicações**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011. 451p.

POOLE, David. **Álgebra Linear**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004. 690 p.