

## O CÁLCULO DE ÁREAS E O PROBLEMA DE QUADRATURA: UMA PROPOSTA PEDAGÓGICA COM HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Grasielly dos Santos de Souza  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
grasiellysantossouza@yahoo.com.br

Kelly Cristina Correia Pfahl  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná  
kelly\_correia\_pfahl@hotmail.com

### Resumo:

Neste artigo apresentamos algumas contribuições para a reflexão de uma prática pedagógica sobre o desenvolvimento de conceitos de cálculo de áreas e problemas de quadratura, onde o ponto de partida foi o modo como os gregos calculavam áreas de figuras planas. Propomos duas atividades que podem ser aplicadas em salas de aula de Matemática, no ensino Médio. Focamos a História da Matemática como metodologia de Ensino na aula de Matemática, com uma abordagem tecnológica, utilizando o software Geogebra. Nesse artigo visamos refletir a utilização de uma metodologia de ensino, levando para a sala de aula uma forma de integrá-la com a construção de conceitos matemáticos.

**Palavras-chave:** História da Matemática. Cálculo de áreas. Geogebra. Ensino Médio.

### Introdução

O tema desse artigo resultou da leitura do livro “História da Matemática: Uma visão crítica desfazendo mitos e lendas”, de autoria de Tatiana Roque, realizada na disciplina de História da Matemática do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, campus Cornélio Procópio, no que se refere ao modo de como os gregos calculavam áreas e resolviam problemas de quadraturas de figuras planas. Acreditamos que tais métodos, utilizados antigamente pelos gregos, possam auxiliar o aluno no desenvolvimento de conceitos matemáticos.

A proposta é o desenvolvimento de duas atividades em que ambas apresentam o cálculo de áreas e problemas de quadratura de figuras planas. Tais atividades foram desenvolvidas por meio de duas proposições do livro Elementos, de Euclides. Pretendemos, também, resgatar os conhecimentos da matemática grega trabalhando com a metodologia da História da Matemática, juntamente à abordagem tecnológica utilizando o software Geogebra, ambas as atividades podem ser aplicadas em sala de aula de matemática, especificamente no Ensino Médio, visando uma abordagem diferente. Dessa forma, o aluno

entra em contato com a história desse conhecimento desenvolvido pelos gregos não apenas pelo estudo teórico, mas por meio de atividades práticas que integram a História da Matemática.

### **História da Matemática na sala de aula**

A construção dos conceitos matemáticos não se desenvolveu sozinha, assim mostrar como a expansão das relações matemáticas surgiu é uma estratégia que facilita a compreensão da matemática nos dias atuais. Segundo Santos (2009, p. 20), “é importante olhar para o passado para estudar matemática, pois perceber as evoluções das ideias matemáticas observando somente o estado atual da ciência não nos dá toda a dimensão das mudanças”.

Utilizar a História da Matemática como uma metodologia em sala de aula, em um contexto de ensino aprendizagem, possibilita ao professor, desenvolver um trabalho com diferentes conteúdos, proporcionando ao aluno uma visão de como se deu a ciência desenvolvida pelo homem, a partir de problemas do cotidiano que precisavam de uma solução, enriquecendo assim o saber matemático dos alunos e tornando suas contribuições mais relevantes. A História da Matemática

[...] dá a este aluno a noção exata dessa ciência, como uma ciência em construção, com erros e acertos e sem verdades universais. Contrariando a ideia positivista de uma ciência universal e com verdades absolutas, a História da Matemática tem este grande valor de poder também contextualizar este saber, mostrar que seus conceitos são frutos de uma época histórica, dentro de um contexto social e político (SANTOS, 2009, p. 20).

A História da Matemática trabalhada em sala de aula pode proporcionar ao aluno a construção de novos conceitos e uma visão de como essa ciência se desenvolveu com os povos passados. Cury e Motta (2008) apontam possíveis abordagens em termos de História da Matemática para o ensino em sala de aula, como a utilização ou a busca de novas estratégias para soluções para problemas, utilizando recursos atuais como softwares computacionais.

É importante que, ao abordar em suas aulas a História da Matemática, o professor não a use apenas por meio de narração de textos, pois, cabe a ele a exploração de informações curiosas e interessantes para estabelecer uma motivação ao aluno, de forma que

este explore conceitos matemáticos por meio das relações das ideias matemáticas na investigação da geração de um conceito. Brito (2007, p.15) afirma que:

A história da matemática não deve fazer parte das aulas como coadjuvante, por meio da narração de fatos isolados, mas deve sugerir caminhos para a problematização em forma de atividades que visem à construção de conceitos por parte dos alunos. É importante que os professores tenham a oportunidade de elaborar atividades com esta história e de utilizá-la em suas aulas, pois, nesse processo pressupõe a articulação entre pesquisa e ensino, teoria e prática, os docentes se percebem produtores de novos conhecimentos e a história da matemática assume plenamente seu potencial de formação.

Portanto, entendemos que a História da Matemática pode ser um caminho para que o professor retrate a cultura matemática de variados povos. A utilização da História da Matemática no contexto didático vai muito além de como uma forma de motivação, pois sua amplitude extrapola esse campo. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) valorizam a História da Matemática no processo de ensino aprendizagem:

A história da matemática pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento. Ao revelar a matemática como uma condição humana, ao mostrar as necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento. Além disso, conceitos abordados em conexão com sua história constituem veículos de informação cultural, sociológica e antropológica de grande valor formativo. A história da matemática é, nesse sentido, um instrumento de resgate da própria identidade cultural. (BRASIL, 1999, p.42).

Vale ressaltar que utilizando a História da Matemática como uma metodologia o professor pode levar o seu aluno a refletir sobre como surgiram certos conteúdos matemáticos e como a matemática foi se aprimorando com o passar do tempo. A História da matemática pode propiciar um resgate cultural favorecendo, assim, uma aprendizagem mais significativa para o aluno.

### **A História da Geometria: cálculo de áreas**

Há indícios de que a Geometria teve início no Egito antigo. Por conta das cheias do rio Nilo os povos tinham que fazer as remarcações de suas terras já que suas fronteiras haviam sido apagadas pelas águas, assim desenvolviam técnicas de medição de terras.

Mas foi na Grécia que a Geometria se desenvolveu com uma mudança satisfatória na resolução de problemas com a utilização de uma matemática dedutiva. Para a medição de áreas os gregos utilizavam um método chamado "quadratura". Não se utiliza números para o cálculo de áreas, seu método consistia em transformar figuras em outras de mesma área e, posteriormente, em um quadrado de área igual à figura inicial. O quadrado era usado como padrão de comparação.

Abrindo as portas para uma Geometria logicamente organizada, Os Elementos, escrito por Euclides em torno de 300 a.C., reuniu os maiores conhecimentos matemáticos da época, organizado como sistema dedutivo. Euclides utiliza-se das figuras geométricas de áreas iguais em muitas demonstrações nos Elementos. Neste livro, Euclides mostra como, a partir de qualquer polígono, é possível construir com régua e compasso um quadrado de área igual à figura inicial.

Euclides não define formalmente o conceito de área, mas utiliza-se, no decorrer de sua exposição a noção de que área é a superfície (conteúdo) de uma figura. Área é uma grandeza, é um atributo geométrico da figura. O conceito de área nos Elementos de Euclides é trabalhado a partir de duas abordagens complementares: a equivalência de áreas (figuras com o mesmo conteúdo) e a transformação de figuras (construção de uma figura com forma diferente da primeira mas com o mesmo conteúdo) (MOREIRA, 2010, p. 23).

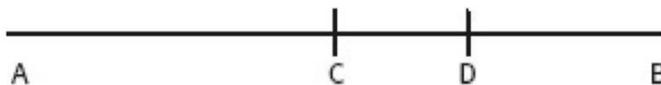
A obra de Euclides serviu para os matemáticos de todas as épocas como exemplo de proceder quanto ao desenvolvimento de uma teoria e como modelo de como raciocinar e demonstrar matematicamente, além de apresentar um compêndio de resultados e verdades matemáticas aceitas que ajudariam no desenvolvimento da matemática (GASCA, 2007, p. 23).

### **Cálculo de áreas e problemas de “quadratura”**

Neste trabalho apresentamos algumas noções dos problemas que envolvem equivalência de áreas, utilizados antes de Euclides, cujas técnicas de resolução, utilizadas desde IV a.E.C. apresentavam métodos semelhantes aos de aplicações de área do Teorema de Pitágoras. O tema é tratado no livro VI de *Elementos*, supostamente com a intenção de utilizar a teoria das razões e proporções de Eudoxo. Com base em duas proposições de Euclides, desenvolvemos duas atividades que exemplificam o modo euclidiano de realizar aplicações de áreas.

**Proposição II-5:** Caso uma linha reta seja cortada em [segmentos] iguais e desiguais, o retângulo contido pelos segmentos desiguais da reta toda, com o quadrado sobre a [reta] entre as seções, é igual ao quadrado sobre a metade (figura 1).

Figura 1 — Reta cortada em segmentos iguais e desiguais



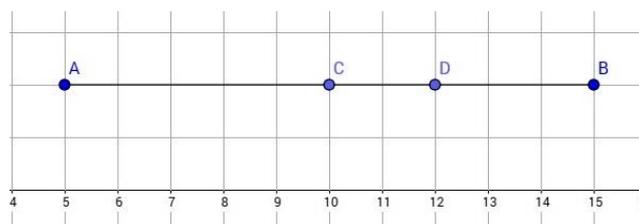
Fonte: ROQUE, 2012, p. 146

A ideia desta atividade surgiu na disciplina História da Matemática, no curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR-CP, quando apresentamos um seminário sobre a matemática grega. Ao expor sobre o modo como os gregos calculavam áreas de figuras planas e resolviam problemas de quadratura, optamos por utilizar o software Geogebra na construção passo-a-passo de duas das proposições de Euclides. A partir daí, percebemos que tal construção poderia ser aplicada em sala de aula de Matemática, utilizando como metodologia a História da Matemática, com uma abordagem tecnológica. Acreditamos que a História da Matemática pode ser entendida como uma alternativa pedagógica que permite ao professor ensinar matemática de forma inovadora.

#### Atividade 1:

Construção dos segmentos descritos na Proposição II-5, com o auxílio do software Geogebra (figura 2):

Figura 2 — Construção da Reta cortada em segmentos iguais e desiguais



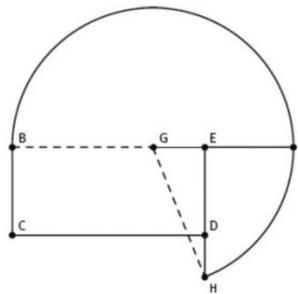
Fonte: As autoras

- Corta-se a reta AB em segmentos iguais por C (AC e CB);
- Corta-se a reta AB em segmentos desiguais por D (AD e DB).

#### Proposição II-14

Construir um quadrado igual à [figura] retilínea dada (figura 3)

Figura 3 — Construção do quadrado



Fonte: ROQUE, 2012, p. 149

### Atividade 2:

Construção de um quadrado de área igual à de um retângulo BEDC dado:

- Se BE é igual a ED, obtém-se o quadrado proposto (figura 4);

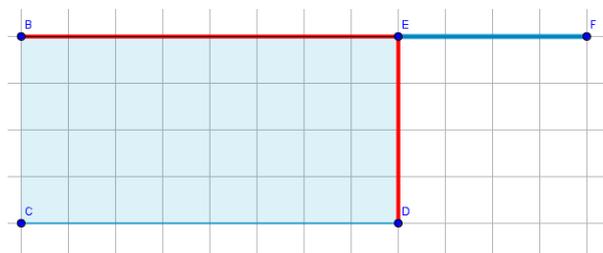
Figura 4 — Construção do quadrado



Fonte: As autoras

- Se não, um dos segmentos, BE ou ED, é maior. Suponha que seja BE, e prolongamos esse segmento até F, de modo que EF seja igual a ED (figura 5).

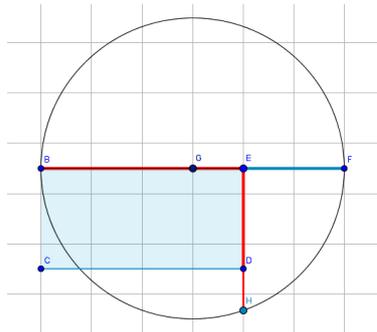
Figura 5 — Prolongamento do segmento BE até F



Fonte: As autoras

- Traçar uma mediatriz em BF e marcar um ponto G interseção da mediatriz com BF;
- Traçar uma circunferência BF com raio GB (ou GF);
- Prolongar ED até um ponto H (da circunferência) (figura 6).

Figura 6 — Construção da circunferência



Fonte: As autoras

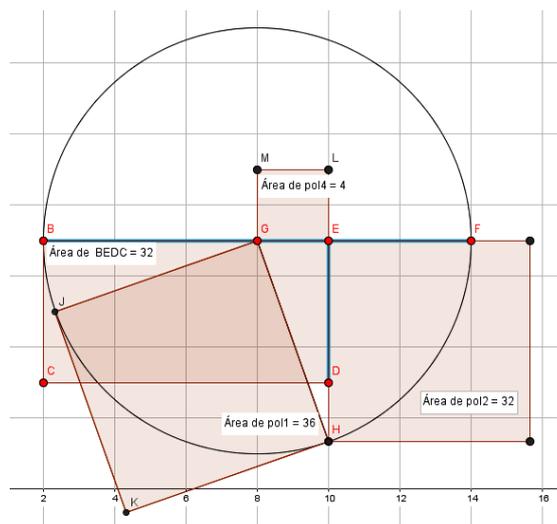
- O quadrado procurado é o de lado EH (mostra-se isso utilizando a proposição II-5).

Demonstração da validade da construção:

Como a reta BF foi cortada em segmentos iguais em G e em segmentos desiguais em E, o retângulo BE por EF, mais o quadrado em GE, é igual ao quadrado em GF (pela proposição II-5). Mas GF é igual a GH, logo, o retângulo de lados BE e EF (que é BEDC), mais o quadrado de lado GE, é igual ao quadrado de lado GH. Por Pitágoras, a soma dos quadrados de lados EH e GE é igual ao quadrado de lado GH (em linguagem atual,  $GH^2 = GE^2 + EH^2$ ), então, o retângulo BEDC, mais o quadrado de lado GE, é igual à soma dos quadrados de lados GE e EH. Subtraindo o quadrado de lado GE de cada, resta que a área do retângulo BEDC é igual à do quadrado de lado EH (ROQUE, 2012, p. 149).

Por meio da proposição II-14, obtém-se a quadratura de uma figura retilínea dada, ou seja, um quadrado com a mesma área de um retângulo dado (figura 7).

Figura 7 — Demonstração da quadratura do retângulo



Fonte: As autoras

No contexto grego, encontrar a quadratura era o mesmo que achar a área de uma figura dada. A maior parte dos enunciados dos primeiros livros dos Elementos “[...] traduzia uma prática que pode ser denominada “cálculo de áreas”, uma vez que consistia em comparar e operar diretamente com áreas de figuras geométricas sem associá-las a números” (ROQUE, 2012, p.150).

Essas atividades foram propostas para que o conteúdo “cálculo de áreas” seja abordado de uma forma diferente do modo tradicional. Nesse sentido, tanto a História da Matemática como a tecnologia são opções metodológicas para o ensino da matemática em sala de aula, podendo proporcionar uma aula mais interessante aos alunos, atribuindo conexões entre os primeiros conceitos de geometria grega e os conteúdos do currículo.

## Referências

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF, 1998.

BICUDO, I. Prefácio e introdução. EUCLIDES. **Os Elementos**. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Introdução**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRITO, A. J. A. **História da Matemática e a Educação Matemática na formação de professores**. Educação Matemática em Revista, ano 13, n. 22, p. 11-15, 2007.

CURY, H. N.; MOTTA, C. E. M. **Histórias e estórias da matemática**. In: CARVALHO, L. M. et al. (Ed.). **História e tecnologia no ensino da Matemática**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008.

GASCA, A. M. **Euclides: la Fuerza del Razonamiento Matemático**. Madri: Nivola, 2007.

MOREIRA, D. D. Marli. **Revisando Euclides para o Ensino de áreas: Uma Proposta para licenciaturas**. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – UFRJ, Rio de Janeiro.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática** – Uma visão crítica, desfazendo Mitos e Lendas. São Paulo: Zahar, 2012.

SANTOS, L. M. dos. **Metodologia do ensino de Matemática e Física: Tópicos de história da física e da matemática**. Curitiba: Ibepex, 2009.