

PENSAMENTO ALGÉBRICO: ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA DE ESTUDANTES PARTICIPANTES DE UM PROJETO DE ENSINO

Angela Marta Pereira das Dores Savioli¹
Universidade Estadual de Londrina
angelamartasavioli@gmail.com

Eduardo Machado da Silva
Faculdade de Educação da USP
dumatematica@gmail.com

Resumo:

O projeto de ensino intitulado *Oficinas de Resolução de Problema* visava oferecer aos estudantes do primeiro ano do curso de Matemática, de uma universidade norte paranaense, oportunidades para estudar e discutir alguns conteúdos de matemática da Educação Básica, de modo a sanar as dificuldades em relação a estes e contribuir para um melhor desempenho acadêmico e proporcionar aos alunos maior confiança em prosseguir no curso. Neste trabalho será apresentado um relato de uma parte da análise descritiva interpretativa das produções escritas dos estudantes participantes da primeira atividade do projeto, que era composta por cinco questões de cunho diagnóstico. Para cada questão, descreveu-se como ela foi resolvida pelos estudantes, agrupando as soluções semelhantes, apontando algumas dificuldades percebidas e indícios de pensamento algébrico, de acordo com as proposições de alguns teóricos. Conclui-se que a maioria dos registros apresentou indícios de pensamento algébrico, com muitas dificuldades em relação à proporcionalidade inversa, interpretação dos dados do enunciado, linguagem algébrica, entre outras.

Palavras-chave: Pensamento algébrico. Ensino Superior. Dificuldades. Resolução de problemas.

Introdução

A Educação nos últimos trinta anos vem sofrendo com as diversas transformações (sociais, econômicas, políticas, culturais, tecnológicas e outras) que ocorrem na sociedade e que acabam interferindo na maneira como os conteúdos são tratados, tanto na Educação Básica como no Ensino Superior. Assim, refletir sobre a prática pedagógica do professor é fundamental no entendimento e na busca de soluções para enfrentar as dificuldades encontradas no ambiente escolar, principalmente no que se refere às problemáticas do processo de ensino e de aprendizagem.

Dessa forma, buscar, por meio da realização de oficinas, intensificar o diálogo entre estes dois níveis de ensino, Básico e Superior, desenvolvendo atividades acadêmicas que

¹ Apoio financeiro da Fundação Araucária e do FNDE.

proporcionem maiores discussões de conteúdos matemáticos minimizaria essas dificuldades, pensando sempre em tornar o conteúdo trabalhado algo significativo para o aluno.

Como os estudantes do Ensino Médio, muitas vezes não têm contato com diversos conteúdos matemáticos (como gráficos de funções, parte da geometria plana e espacial, entre outros) previstos em seus currículos e que, ao passarem por um curso de formação de professores de matemática ou de matemáticos eles devam saber, ou pelo menos já terem ouvido falar, desses conteúdos, foi proposto em março de 2010 um projeto² a ser desenvolvido em um curso de matemática de uma universidade norte paranaense, visando realizar atividades com conteúdos do Ensino Médio e Fundamental, utilizando a resolução de problemas, por meio da realização de oficinas.

Optou-se em utilizar essa vertente da Educação Matemática, pois um

[...] dos objetivos de trabalhar com a resolução de problemas é, de maneira geral, contribuir no desenvolvimento intelectual do aluno, nos que diz respeito aos aspectos específicos do saber matemático. Além do mais, através dessa estratégia é possível interligar a Matemática com outras disciplinas ou mais situações do mundo vivenciado pelo aluno (PAIS, 2006, p. 131).

Nessa perspectiva, segundo Weber (2010),

[...] face aos desafios que os alunos de cursos de matemática experimentam em acompanhar os mesmos, decorrentes de uma formação básica deficiente, gerando elevados índices de reprovação e desistência, especialmente na série/semestre inicial, o projeto Oficinas de Resolução de Problemas teve por fim prestar apoio aos mesmos mediante um acompanhamento direto em suas dificuldades e a promoção de ações pedagógicas visando minimizar os problemas enfrentados (WEBER, 2010, p. 3).

Assim, a proposta aqui é relatar uma parte da análise descritiva interpretativa das produções escritas dos estudantes participantes da primeira atividade do projeto, a qual constou de cinco questões, constituindo-se uma avaliação diagnóstica. Para cada questão, descreveu-se como ela foi resolvida pelos estudantes, agrupando as soluções semelhantes, apontando algumas dificuldades percebidas e indícios de pensamento algébrico segundo indicadores de Fiorentini, Miguel e Miorin (1993), Fiorentini, Cristóvão e Fernandes (2005).

Dificuldades e o pensamento algébrico

² Projeto de pesquisa em ensino *Oficinas de Resolução de Problemas* desenvolvido pelo Departamento de Matemática da UEL.

São várias as dificuldades enfrentadas pelos alunos quando iniciam sua vida acadêmica no Ensino Superior, principalmente quando necessitam de conteúdos com os quais, muitas vezes, não tiveram contato. Entender um enunciado, esquematizar em uma linguagem matemática adequada, manipular as informações e finalmente, apresentar uma resposta satisfatória, exige não somente o conhecimento de técnicas e manipulações, mas sim um pensar mais avançado. Assim, serão abordados, brevemente, alguns aspectos do pensamento matemático, mais especificamente, o algébrico, que subsidiarão as análises dos registros escritos dos estudantes que participaram da pesquisa.

A respeito do pensamento algébrico no Ensino Superior, alguns destaques serão feitos considerando que, para alguns autores, como Dreyfus (1991), o pensamento algébrico e matemático avançado já se iniciam na Educação Básica. Além disso, esse autor enfatiza que a reflexão sobre a própria experiência matemática torna-se um aspecto fundamental durante tal processo. Entretanto, isso nem sempre se torna possível, pois inserido no contexto do Ensino Superior, o professor em geral, concentra-se em apresentar/mostrar diversas definições matemáticas destacando suas propriedades, sem deixar qualquer espaço para que os estudantes possam refletir sobre o que está sendo exposto.

Já Fiorentini *et al.* (2005) dividem o desenvolvimento do pensamento algébrico em três fases: a pré-algébrica, em que o estudante utiliza eventualmente um elemento considerado algébrico, porém ainda não o idealiza como um número generalizado; a transição, na qual o estudante concebe a existência de um número qualquer, realizando algumas generalizações utilizando ou não símbolos, e, finalmente, o pensamento algébrico mais desenvolvido, em que o estudante idealiza a existência de grandezas abertas ou variáveis dentro de um intervalo numérico, sendo apto a expressar e operar com elas. Entendemos que, para esses autores, o desenvolvimento do pensamento algébrico está ligado à apropriação da linguagem algébrica. Cabe salientar que esta apenas potencializa o desenvolvimento do pensamento algébrico, não o determinando.

Em termos de pensamento matemático, Tall (2002) diferencia-o em elementar e avançado. Contudo, segundo Domingos (2003) a distinção

[...] entre os dois modos de pensamento aparece bastante mais diluída na abordagem que é feita por Dreyfus (1991) ao considerar que é possível pensar sobre tópicos de matemática avançada de uma forma elementar e a distinção entre os dois tipos de pensamento reside na complexidade e na forma como se lida com ela”. Ele admite que não há uma distinção profunda entre muitos dos processos que são usados no pensamento matemático elementar e avançado, mesmo considerando que a matemática avançada se foca essencialmente nas abstrações de definições e deduções. Os processos

que Dreyfus considera estarem presentes nos dois tipos de pensamento são os processos de *representação* e de *abstração*, sendo a principal diferença marcada pela forma como a complexidade que é exigida em cada um deles é abordada (p.5).

Além disso, Dreyfus (1991) apresenta alguns outros processos que estariam embutidos na representação e na abstração, como representação, visualização, classificação, indução, análise, síntese, generalização, abstração, entre outros.

Já em relação à linguagem algébrica,

[...] a tendência da Educação Algébrica tem sido acreditar que o pensamento algébrico só se manifesta e desenvolve através da manipulação sintática da linguagem concisa e específica da Álgebra. Entretanto, essa relação de subordinação do pensamento algébrico à linguagem desconsidera o fato de que, tanto no plano histórico quanto no pedagógico, a linguagem é, pelo menos a princípio, a expressão de um pensamento. Acreditamos subsistir entre pensamento algébrico e linguagem não uma relação de subordinação, mas uma relação de natureza dialética, o que nos obriga, para melhor entendê-la, colocar a questão de quais seriam os elementos caracterizadores de um tipo de pensamento que poderia ser qualificado como algébrico (FIORENTINI et al., 1993, p.85).

Assim, os autores consideram que

[...] o modo como buscamos caracterizar o pensamento algébrico nos leva, portanto, a pensar que ele é um tipo especial de pensamento que pode se manifestar não apenas nos diferentes campos da Matemática, como também em outras áreas do conhecimento (FIORENTINI et al., 1993, p. 88).

Portanto, após essa breve explanação, verifica-se que houve indícios de pensamento algébrico quando um ou mais dos seguintes indicadores se fizerem presentes: generalização, quando o estudante explicitasse em seus registros um modo de resolver que possibilitaria ser utilizado em outro problema; regularidade; utilização ou cálculo de incógnitas; utilização ou cálculo com variáveis; utilização de diagramas e notação de conjuntos; utilização de equações. Possíveis dificuldades, como interpretação errônea do enunciado, utilização de uma linguagem não adequada, escolha de uma estratégia que não resolve a questão, escolha de um procedimento errado, etc., encontradas nos registros escritos dos estudantes participantes da pesquisa serão elencadas e, algumas, comentadas. Os termos estratégia e procedimento serão utilizados no mesmo sentido de Viola dos Santos (2007), qual seja,

[...] estratégia como a maneira pela qual o aluno abordou a questão, ou seja, sua interpretação do enunciado, os procedimentos que utilizou oriundos dessa interpretação, e a apresentação da resposta oriunda desses procedimentos. Já por procedimentos estamos entendendo os algoritmos das operações, as regras algébricas de uma equação, ou seja, os resultados que os alunos usam para elaborar a sua estratégia. Uma estratégia é constituída de procedimentos (VIOLA DOS SANTOS, 2007, p. 50).

Na próxima seção apresenta-se o relato da aplicação das questões aos estudantes.

A Experimentação

A primeira oficina contou com a presença de 16 estudantes da primeira série de um curso de matemática de uma universidade estadual paranaense, participantes do projeto.

Foram aplicadas cinco questões envolvendo vários conteúdos da Educação Básica na perspectiva da resolução de problemas e seus registros escritos foram entregues ao professor coordenador do projeto. As questões foram escolhidas e elaboradas com o objetivo de verificar se nos conteúdos abordados por elas, os estudantes teriam alguma dificuldade, de fazer uma avaliação diagnóstica visando à organização de futuras oficinas, nas quais os conteúdos das dificuldades seriam trabalhados. Não se permitiu a consulta em qualquer material, como cadernos e livros. Nem todos os estudantes resolveram a totalidade das questões, deixando várias em branco e foi solicitado que eles deixassem os seus registros na folha de questões.

Descreveu-se e interpretou-se a resolução de cada questão, procurando indícios dos indicadores de pensamento algébrico, de desenvolvimento da linguagem algébrica e possíveis dificuldades encontradas. Além disso, estratégias e procedimentos utilizados foram elencados.

Investigação dos registros escritos³

Para cada questão, será apresentada uma descrição dos registros escritos dos participantes e, após, a sua relação com o referencial adotado.

- 1. Sete operários, que trabalham com a mesma eficiência, realizam uma obra em 36 horas. Em quantas horas 4 destes operários realizariam a mesma obra?*

Para resolver esta questão utiliza-se, geralmente, a noção de proporcionalidade inversa. Quatro estudantes utilizaram corretamente uma regra de três, como estratégia, e chegaram à resposta correta, demonstrando conhecimento da linguagem algébrica e de sua manipulação, caracterizando indícios de pensamento algébrico e conhecimento desse

³ Salienta-se que não houve autorização dos estudantes participantes para publicação dos registros escritos.

conteúdo matemático. O procedimento constou de um esquema para a regra de três para obter uma equação do primeiro grau, cuja solução responderia a questão.

Outros seis não perceberam que, tendo um número menor de operários, o número de horas deveria aumentar. Assim, não conseguem trabalhar com proporcionalidade inversa sinalizando uma dificuldade com o conceito de proporcionalidade. Outros três não chegaram a explicitar a regra de três, contudo foram fazendo alguns cálculos e chegaram à resposta correta, tendo como estratégia uma tentativa e erro e, como procedimento, a manipulação algébrica. Esses estudantes mostraram indícios de pensamento algébrico. Seis estudantes interpretaram a questão de outra forma sem relação com o problema original. O restante dos estudantes dividiu 36 por sete, apresentando como resposta o resultado da divisão, provavelmente pensando que cada operário trabalharia separadamente, não captando o restante do enunciado, focando apenas na primeira informação e realizando a operação correspondente.

Desse modo, a dificuldade em solucionar esse problema foi em relação à sua interpretação e montagem da regra de três não percebendo que se tratava de grandezas inversamente proporcionais. O pensamento algébrico manifestou-se em alguns registros pela utilização correta da linguagem algébrica, padrões e de incógnitas.

Apesar de alguns estudantes não conseguirem solucionar corretamente a situação proposta, mostraram a partir dos registros escritos alguns indicadores referentes ao pensamento algébrico, como padrões e regularidades. Outros indicadores que ocorreram com frequência foram a utilização ou cálculo de incógnitas, utilização ou cálculo com variáveis e a utilização de equações. Entende-se que eles buscaram encontrar a resposta para o problema apresentado a partir da resolução de uma equação, isto é, em encontrar o “ x ” da questão que é a incógnita. Por fim, o indicador generalização não apareceu em algumas soluções, pois alguns estudantes encontraram a resposta usando como estratégia tentativa e erro.

Dessa forma, conclui-se que existe a presença de duas fases do pensamento algébrico presentes. Segundo Fiorentini et al., (2005), a fase de transição que é caracterizada pela realização de alguns cálculos juntamente com a busca por padrões e com o raciocínio auxiliar da dedução pode-se encontrar a resposta. E os indicadores que apontam para o pensamento algébrico mais desenvolvido se encontram nos registros em que os estudantes resolvem a questão da maneira que se esperava. Assim, há indícios sobre o pensamento matemático avançado quando se trata de uma abordagem na qual o pensamento algébrico dos estudantes

apresenta generalizações para a resolução, isto porque, eles percebem, agem e pensam sobre o objeto matemático em questão.

2. *Em uma pesquisa realizada com 50 pessoas para saber que esporte elas apreciam entre futebol, basquete e vôlei, o resultado foi o seguinte: 23 gostam de futebol, 18 de basquete e 14 de vôlei; 10 gostam de futebol e de basquete; 9 de futebol e de vôlei; 8 de basquete e de vôlei; e 5 gostam das três modalidades.*
- a) *Quantas pessoas não gostam de nenhum desses esportes?*
 - b) *Quantos gostam somente de futebol?*
 - c) *Quantos gostam só de basquete?*
 - d) *Quantos gostam apenas de vôlei?*
 - e) *Quantos não gostam nem de basquete nem de vôlei?*
 - f) *Quantas pessoas gostam só de futebol ou só de vôlei ou só de basquete ou de ambos?*

Para resolver esta questão utiliza-se de conjuntos e propriedades dos conjuntos e somente dois estudantes a acertaram. Quatro, apesar de utilizarem diagramas, não conseguiram passar a questão para uma linguagem de conjuntos adequada, colocaram os valores espalhados sem conexão, entre outros registros que nada acrescentavam. Seis colocaram exatamente os valores do enunciado, como, por exemplo, 23 para os que gostam somente de futebol, não refletindo que nesse valor estariam contabilizados aqueles que gostam de futebol e de outra atividade. Um não conseguiu montar ou manipular um diagrama corretamente e também não apresentou outra ideia, sendo induzido ao erro. Um deixou em branco. Um estudante registrou alguns números e percebe-se que não tinha ideia do que estava acontecendo, outro colocou algumas propriedades dos conjuntos, mas não conseguiu resolver a questão. Parece ter buscado na memória “algo” relacionado ao tema, mas não conseguiu organiza-lo.

A linguagem algébrica, mais especificamente a linguagem de conjuntos, não foi utilizada corretamente pela maioria dos estudantes. O fato de colocarem exatamente os valores do enunciado e de não descontarem o que já estava na interseção, justifica a afirmação. O pensamento algébrico manifestou-se nos registros dos alunos que utilizaram corretamente diagramas e simbologia de conjuntos.

Nota-se que nessa questão que envolveu conceitos e operações entre conjuntos, grande parte dos estudantes se encontrou nas fases de pré-álgebra e de transição, pois segundo os

indicadores observados, eles continuam buscando regularidades e a partir delas generalizar suas conclusões, porém, a má interpretação do enunciado da tarefa e a utilização da linguagem de conjuntos e diagramas de maneira incorreta evidenciam dificuldades. Poucos estudantes mostraram possuir o pensamento matemático avançado, pois mesmo tentando generalizar a solução da questão proposta, não relacionaram as ideias por trás dessa questão com outras ideias matemáticas.

Apesar de os estudantes não deixarem explícito como resolveram a questão proposta, alguns indicaram os cálculos que enxergaram como um caminho para encontrar a solução da questão, todavia, apresentaram dificuldades em lidar e utilizar outras ferramentas matemáticas que poderiam auxiliá-los durante a resolução da atividade.

3. *Biólogos descobriram que o número de sons emitidos por minuto por certa espécie de grilos está relacionado com a temperatura. A relação é quase linear. A 680 F, os grilos emitem cerca de 124 sons por minuto. A 800 F, emitem 172 sons por minuto. Admitindo que a relação seja linear, encontre a equação que relaciona a temperatura em Fahrenheit e o número de sons n .*

Um estudante deixou em branco. Sete estudantes apenas colocaram os valores, não exibindo tentativa de solução. Dois estudantes apenas montaram as equações com os dados da questão e fizeram uma subtraída da outra e concluíram que $f(n) = 2n$, erroneamente. Dois estudantes encontraram o coeficiente angular da reta, mas calcularam a constante de maneira errada. Dois estudantes acertaram. Um estudante calculou o coeficiente angular invertido.

A maioria dos estudantes teve dificuldade em trabalhar com as informações da questão mencionando somente os valores e não exibindo a função. Muitos estudantes acreditam que exemplos e valores soltos resolvem problemas. Outra vez tem-se a utilização errônea da linguagem algébrica dificultando a manipulação dos dados. O emprego de equações e incógnitas nas resoluções de alguns estudantes caracterizou uma manifestação do pensamento algébrico.

A busca por regularidades e padrões foi uma estratégia fortemente utilizada pelos estudantes. Além disso, alguns tentaram relacionar os dados apresentados pelo enunciado com uma função do primeiro grau buscando a resposta para a questão. Outra característica foi a de que alguns deles tentaram resolver a questão usando como modelo um sistema linear. Vários efetuaram equivocadamente operações aritméticas simples como a adição e a subtração.

Comparando os resultados obtidos nessa questão com os referenciais teóricos conclui-se que na perspectiva de Fiorentini *et al.* (2005) há duas das três fases do pensamento algébrico, a transição, pois eles buscam padrões e regularidades e conseguem mesmo que de forma errônea introduzir o uso de equações do primeiro grau, e o pensamento algébrico mais desenvolvido, porque relacionam os conceitos de função do primeiro grau com sistema linear. Outros fazem uma abordagem por meio das ideias da geometria analítica que viram durante o Ensino Médio. Alguns estudantes mostraram indícios do pensamento matemático avançado, pois perceberam, agiram e executaram a estratégia que traçaram.

4. *Uma encomenda, para ser enviada pelo correio, tem um custo C fixo de R\$ 10,00 para um peso P até 1 kg. O que ultrapassa este peso tem um custo adicional de 30 centavos por quilograma. Determine uma função que represente o custo de uma encomenda de peso P 1 kg.*

Dois estudantes deixaram em branco esta questão. Um estudante confundiu centavos com reais e considerou 30 reais ao invés de 30 centavos. Alguns alunos colocaram a lei da função diretamente, sem explicar porque chegou a esse resultado e pode-se inferir que estes entenderam o enunciado. Outros estudantes encontraram a lei para P menor do que um quilo e o gráfico apresentado é o de uma função afim. Alguns estudantes encontraram a lei errada para a função e outros não determinaram a lei da função, mas construíram o gráfico.

Esta questão pode envolver em sua solução uma parte algébrica e uma gráfica, representações distintas de um mesmo objeto matemático, logo a dificuldade foi maior, levando-os a confusões. Os que acertaram colocaram a lei diretamente, não justificando. Pode-se entender que já estão em um processo de generalização. Novamente as dificuldades que apareceram foram em relação à manipulação da linguagem algébrica.

Os estudantes buscaram padrões e regularidades para encontrar a resposta da questão, porém a maioria apresentou dificuldade em interpretá-la corretamente. Comparando os registros escritos com os indicadores verificou-se, com base nos referenciais, que eles se encontram em fase de transição, pois apesar de buscarem generalizar a solução para a questão, eles apresentam dificuldade em expressar e justificar as etapas percorridas para apresentar a fórmula que modela a questão matematicamente. Com relação ao pensamento matemático avançado essa atividade mostra que eles não percebem que tipo de conceito pode ser empregado para resolver a questão, não realizando a sintetização, segundo Dreyfus (1991).

5. *Dois carros partem ao mesmo tempo de uma cidade A em direção a uma cidade B. Um deles viaja a uma velocidade constante de 60 km/h e o outro a 70 km/h. Se o carro mais rápido chega 15 minutos antes do outro, qual é a distância entre as duas cidades?*

Três estudantes deixaram em branco. Cinco deles escreveram alguns dados da questão. Um estudante relacionou a quilometragem com o tempo, igualando 70 com 15, 140 com 30, etc.. Outro apenas colocou 17,5 km, e a frase o mais rápido em 15 minutos. Dois estudantes dividiram 70 por 4, chegando a 17,5 km. Um estudante misturou tempo e distância e chegou à resposta de 130 km, outro acertou, chegando à resposta de 105 km e um terceiro encontrou o tempo e confundiu com a distância percorrida.

A maioria fez manipulações algébricas com os dados não chegando a lugar algum e houve confusão ao tratar com a linguagem algébrica. Relacionaram tempo e espaço, mas não souberam operar corretamente.

Os estudantes utilizaram os conceitos aprendidos em Física para solucionar a questão, o que para indica generalização, pois esse conceito se encontra presente com eles. Outro fator que se deve levar em conta é que a maioria deles apresenta dificuldade em interpretar o enunciado da questão e em transformar o que está sendo proposto em uma equação matemática.

Com relação ao que é apresentado por Fiorentini *et al.* (2005) os estudantes se encontram em fase de transição, devido a dificuldade em expressar matematicamente a questão. Ao que é proposto por Dreyfus (1991) entende-se que não há pistas que indiquem a presença do pensamento matemático avançado nessa atividade, pois a impressão que temos é que eles tentam resolver a questão a partir do que eles se lembram do que foi tratado durante o Ensino Médio.

Algumas considerações

Pode-se inferir que existe uma parcela de estudantes que possuem dificuldade em solucionar problemas que são considerados elementares para quem está cursando o Ensino Superior.

Outra parte são os estudantes que tentaram resolver a questão proposta, mas que por uma dificuldade relacionada à interpretação dos enunciados não conseguiram chegar à resposta esperada. Entende-se que os estudantes que se encontram nesse patamar apresentaram de certa forma a característica de percepção proposta por Tall (1995), uma vez que conseguiram manipular os dados apresentados. Porém, seguindo as ideias de Dreyfus (1991), alguns não conseguem representar os dados de forma significativa de modo a resolver a questão, impedindo que eles alcancem o nível de abstração. Com relação à linguagem algébrica utilizada por esses estudantes nota-se que a dificuldade em lidar com os dados tem influência direta na linguagem. Portanto, esses estudantes se encontram, segundo Fiorentini *et al.* (2005), em processo de transição para um pensamento algébrico mais desenvolvido.

E por fim, há outra parcela de estudantes que podem ser classificados segundo Fiorentini *et al.* (2005) com pensamento algébrico mais desenvolvido, pois mostraram ter pelo menos três dos indicadores sugeridos pelos autores.

Considera-se a existência de características que apontam para o pensamento matemático avançado, porque eles perceberam, pensaram e agiram na resolução das atividades propostas o que enfatiza os processos de representação e abstração propostos por Dreyfus (1991).

Assim, conclui-se que a maioria dos registros apresentou indícios de pensamento algébrico, mas muitas dificuldades, como com proporcionalidade inversa, interpretação dos dados do enunciado, má utilização da linguagem algébrica, entre outras. Considerando que são estudantes que já passaram pelo Ensino Médio é possível perceber uma série de problemas referentes aos conteúdos da Matemática Básica que não os permitem desenvolver o pensamento matemático avançado, pois segundo os processos de Dreyfus (1991) a maioria dos registros aqui analisados não atingiu a abstração.

Referências

DOMINGOS, A. **Compreensão de conceitos matemáticos avançados – a matemática no início do superior.** Tese de doutoramento não publicada. Faculdade Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, 2003.

DREYFUS, T. Advanced mathematical thinking processes. In: D. Tall (Ed.), **Advanced Mathematical Thinking** (pp. 25-41). Dordrecht: Kluwer, 1991.

FIorentini, D.; FERNANDES, F. L. P.; CRISTOVÃO, E. M. **Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do**

pensamento algébrico. Relatório de Projeto da Fapesp [processo 03/11233-4]. FE – UNICAMP: Campinas, 2005.

FIorentini, D.; Miorim, M. A.; Miguel, A. Contribuição para um repensar... a educação algébrica elementar. **Pro-Posições**, v.4, n.1, p.78-91, 1993.

PAIS, L. C. **Ensinar e Aprender Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

TALL, D. **Advanced mathematical thinking.** New York: Kluwer Academic Publishers, 1991.

TALL, D. **Advanced mathematical thinking.** New York: Kluwer Academic Publishers, 2002.

TALL, D. Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. In: L. Meira e D. Carraher (Eds.), **Proceedings of the Nineteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education** (Vol. 1, pp. 61-75). Recife, Brasil, 1995.

VIOLA DOS SANTOS, J. R. **O que alunos da Escola Básica mostram saber por meio de sua produção escrita em matemática.** 2007. 114 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, 2007.

WEBER, O. A. **Temas, Problemas e Soluções.** Projeto de Pesquisa em Ensino de Graduação n° 499. Universidade Estadual de Londrina, 2013, p. 1-11.

WEBER, O. A. **Oficinas de Resolução de Problemas.** Projeto de Pesquisa em Ensino de Graduação n° 88. Universidade Estadual de Londrina, 2010, p. 1-11.