

## USO DO GEOGEBRA 3D NA FORMAÇÃO CONTINUADA POR MEIO DA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA NA GEOMETRIA ESPACIAL

Jotair Elio Kwiatkowski Jr.  
Universidade do Centro Oeste  
jotairkw@yahoo.com.br

Marcio André Martins  
Universidade do Centro Oeste  
prof.mmartins@gmail.com

Maria Regina Carvalho Macieira Lopes  
Universidade do Centro Oeste  
mrlopes@unicentro.br

### **Resumo:**

Neste texto é apresentada uma sequência didática para o estudo da Geometria Espacial utilizando a Investigação Matemática como metodologia de ensino e o GeoGebra 3D como recurso tecnológico. A pesquisa adotou uma abordagem qualitativa-interpretativa e foi desenvolvida em um curso de formação continuada com professores de Matemática do Ensino Básico da Rede Pública de Ensino do Estado do Paraná. Os resultados indicam que a proposta é promissora no que se refere ao uso da metodologia em sala de aula, já que as atividades são elaboradas para permitir que o aluno participe, estabeleça estratégias, levante conjecturas e apresente os resultados obtidos na resolução dos exercícios propostos. A ferramenta tecnológica utilizada, GeoGebra 3D, veio ao encontro das necessidades relatadas pelos cursistas, no que se refere a representação dinâmica e tridimensional dos objetos geométricos, e cumpre o seu papel enquanto mídia tecnológica no ensino da matemática.

**Palavras-chave:** Investigação Matemática. GeoGebra 3D. Formação Continuada.

### **Introdução**

Aspectos relacionados à formação de professores não caracterizam preocupações recentes, ou seja, fazem parte da história da educação escolar brasileira, porém como pontua Gatti (2009, p. 90) “emergem problemáticas atuais”. As mídias tecnológicas estão presentes neste cenário e do professor, em formação constante, espera-se um saber que alie conhecimento e conteúdo à didática e às situações de aprendizagem profícuas.

Nesse sentido, no âmbito do Ensino de Matemática, Miranda e Laudares (2007, p. 71) julgam imprescindível “o estudo das experiências exitosas da informática educativa para que o professor acredite no potencial dos instrumentos da mídia e do computador como recursos didáticos no ensinar e no aprender”.

Especialmente sobre o uso do computador nas aulas de Matemática, os *softwares* educativos vêm se consolidando como uma tendência, em que são valorizadas as atividades

investigativas. Estas compõem um dos fios condutores de formação continuada assinalada pela predisposição do educador em não ser indiferente, em se portar como agente problematizador do desdobramento da própria prática no contexto escolar e de sala de aula (SILVA MACHADO, 2010).

Ao professor pesquisador cabe, portanto, estudar formas e momentos adequados para a utilização das novas tecnologias em sala de aula. Com esse intuito, considera-se a seguinte questão norteadora no âmbito do ensino e da aprendizagem da Matemática: quais as potencialidades da integração das abordagens metodológicas: investigação matemática e mídias tecnológicas? Como situação de experimentação delimitou-se o emprego de investigação matemática com 31 professores da rede pública estadual do Paraná, com o intuito de apresentar uma aula com essa perspectiva. O *software* GeoGebra 3D foi escolhido como ferramenta tecnológica por apresentar um potencial papel investigativo em ambiente dinâmico tridimensional.

### **Sobre as mídias tecnológicas e a investigação matemática**

As Tecnologias de Informação e Comunicação – TICs – chegaram na educação como potencializadoras do processo de ensino e aprendizagem. Embora haja nas escolas os recursos tecnológicos (MORAN, 2000), há iniciativas isoladas dos professores quanto à inserção das TICs em suas práticas pedagógicas. Muitos sentem-se inseguros por não terem sido preparados em sua formação acadêmica e por isso há necessidade de prepará-los.

A tecnologia informática, representada pelos *softwares* de geometria dinâmica, têm provocado transformações no ensino de geometria pela possibilidade de “simulação de situações e fenômenos, *feedback* imediato, capacidade de movimentação de figuras na tela e o uso de códigos de comando por meio de ordens claras, diretas e lógicas” (MAGINA, 1988).

Em especial, o *software* livre GeoGebra, criado por Markus Hohenwarter em 2001, possui uma característica interessante que é a possibilidade de visualização simultânea da construção em suas janelas algébrica e geométrica (2D e 3D). No estudo de uma função quadrática, por exemplo, o usuário por meio das modificações nos parâmetros, pode observar as transformações no gráfico da função e fazer as relações pertinentes. Nesse momento de exploração e de análise inicia-se uma aprendizagem de Investigação Matemática pois para Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p.13): “investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades”. Segundo os autores, o aluno é chamado a agir como um matemático, não só na

formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação e discussão dos resultados.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p.25) sugerem que a atividade investigativa em contextos de ensino, aprendizagem ou formação, seja desenvolvida em três etapas:

- (i) introdução da tarefa, em que o professor faz a proposta à turma, oralmente ou por escrito, (ii) realização da investigação individualmente, aos pares, em pequenos grupos ou com toda turma, e (iii) discussão dos resultados, em que os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado.

O processo de investigação é iniciado com uma questão 'aberta' que não está completamente definida, cabendo ao aluno um papel fundamental na sua concretização. Na condução da atividade o professor pode dar algumas pistas de exploração para garantir que o trabalho flua, sem limitar a possibilidade do aluno de estabelecer as suas próprias conjecturas. O professor também deve promover um ambiente no qual o aluno sinta-se à vontade para questionar, pensar e apresentar suas ideias para o professor e para os colegas.

Há alguns trabalhos na literatura que tratam da investigação matemática utilizando o GeoGebra. Oliveira e Vaz (2014) apresentam os resultados parciais das atividades desenvolvidas pelos acadêmicos da disciplina de estágio supervisionado do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Goiás. Os acadêmicos elaboraram projetos de pesquisa individuais com o objetivo de analisar a Investigação Matemática, enquanto metodologia de ensino, com o uso do *software* GeoGebra na formalização do cálculo do número de diagonais de polígonos quaisquer, regra dos trapézios, área de polígonos, propriedades de polígonos, relação entre áreas e iterações de fractais, condições geométricas para construções de ladrilhamentos e funções quadráticas. De acordo com os autores, a pesquisa permitiu a reflexão “sobre metodologias de ensino, recursos didáticos e o papel do professor nas aulas investigativas”(OLIVEIRA e VAZ,2014)”.

Silva, Leivas e Dal Ri (2016) sob a ótica da investigação exploraram a construção da Espiral de Arquimedes no ambiente GeoGebra com estudantes do Ensino Médio na cidade de Macapá, no Estado do Amapá. A questão inicial proposta aos alunos foi: como calcular o número de voltas de papel contido em uma bobina e seu comprimento total? No decorrer da investigação, os estudantes, em duplas, exploraram livremente o software, sendo constantemente convidados a relatar suas observações. De acordo com os autores, a postura investigativa que se esperava dos alunos foi alcançada e o aplicativo permitiu que todos os alunos elaborassem suas construções utilizando a curiosidade e a criatividade na solução da questão proposta, sem depender de orientação constante dos professores-pesquisadores. .

Borba, Silva e Ganadisis (2014) propuseram uma exploração visual e dinâmica sobre a noção de derivada na qual é utilizado o recurso “controle deslizante” do *software* para explorar a variação angular de uma reta tangente a uma parábola. Questões como: “Ao manipular o ponto de tangência entre a reta e a curva, que tipo de variações acontecem? Que similaridades você observa entre os elementos algébricos e geométricos na construção?”, caracterizam a natureza investigativa da pesquisa, que pode trazer contribuições significativas ao ambiente da sala de aula.

## **Material e métodos**

Este estudo é de natureza qualitativa-interpretativa, em que segundo Bogdan e Biklen (1994, p. 47-50): tem o ambiente natural como fonte direta dos dados e o pesquisador como instrumento-chave; é descritivo; preocupa-se com o processo e não simplesmente com o produto; a análise dos dados é abdução e a preocupação essencial reside no significado das ações desenvolvidas e observadas.

O ambiente da pesquisa caracteriza-se por momentos de formação continuada de 31 professores de Matemática do Ensino Básico. O trabalho foi desenvolvido em um curso de 16 horas, na Universidade Estadual do Centro Oeste, dentro do Programa de Desenvolvimento Educacional – PDE – da Rede Pública de Ensino do Estado do Paraná. Os cursistas eram docentes em vários anos da Educação Básica e, alguns há algum tempo não trabalhavam no ensino médio.

Os instrumentos de coleta de dados adotados foram: questionário, observação participante – diário de bordo do pesquisador, assim como a produção escrita dos professores cursistas. O encaminhamento metodológico que embasou as atividades desenvolvidas consiste das Mídias Tecnológicas e da Investigação Matemática segundo Ponte, Brocardio e Oliveira (2009).

## **A sequência didática**

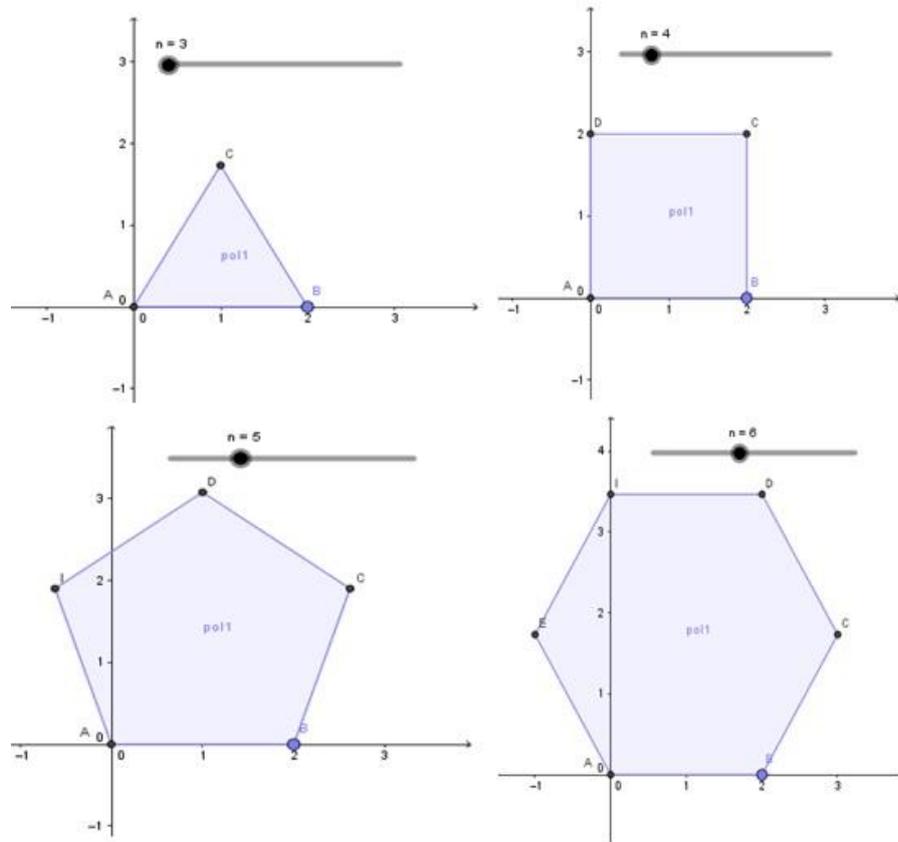
Inicialmente foram investigados os conhecimentos prévios dos cursistas (31 professores do Ensino Básico) sobre a ferramenta tecnológica e sobre o conteúdo Geometria Espacial, mais especificamente, sobre a Relação de Euler, com base em um questionário semi-estruturado, o qual é analisado na seção seguinte.

Em seguida os cursistas foram organizados em 6 grupos, com o objetivo de proporcionar uma experiência com investigação matemática mediada pela ferramenta GeoGebra 3D. Nesse sentido, foram propostas as questões norteadoras aos grupos.

Como você aborda com seus alunos a Relação de Euler? Quais são as dificuldades encontradas?

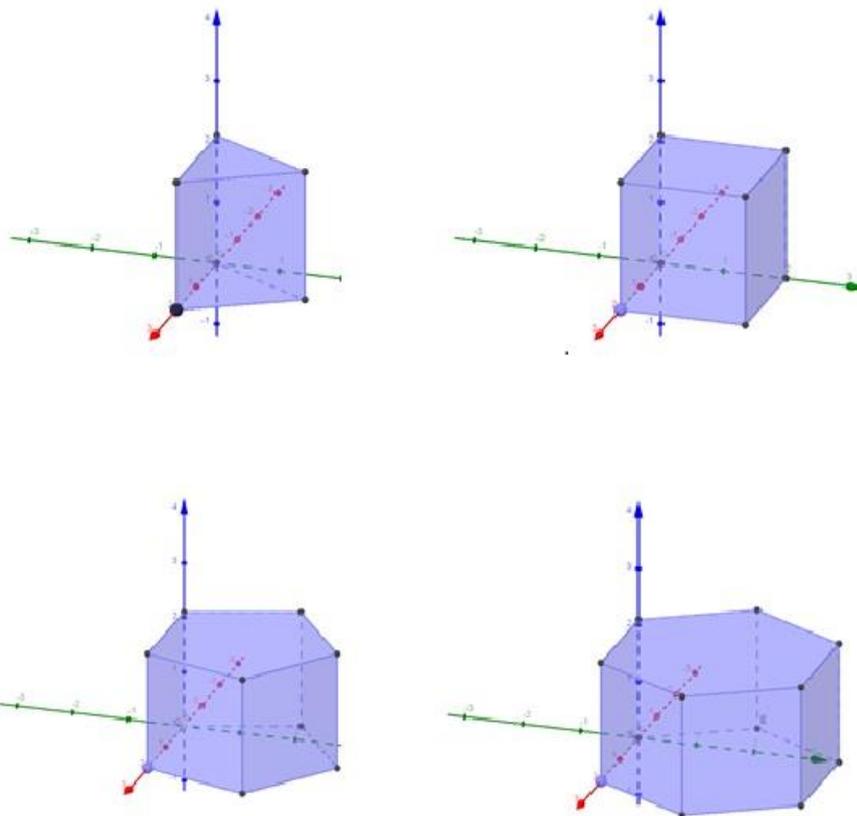
Foi consenso entre os cursistas a abordagem por meio de desenho no quadro, identificação dos sólidos e contagem dos seus elementos constitutivos (ângulos, arestas, vértices e faces). Como principal dificuldade foi relatada a limitação da representação tridimensional, ou seja, a falta de visualização por diversas perspectivas. Outro obstáculo destacado pelos cursistas é a representação e a variação dos elementos constitutivos, visando a compreensão das relações existentes. Neste sentido, na janela 3D do GeoGebra é possível construir, manipular, variar e verificar as relações entre os entes algébricos e geométricos.

Na sequência, foi proposta a construção, no *software*, de um prisma de base qualquer vinculado a um controle deslizante, que possibilita a variação do número de lados do polígono base, conforme o detalhamento: 1º passo – construir um polígono regular de  $n$  lados (determinado por um controle deslizante) na janela 2D, fixados os pontos A e B (Figura 1);



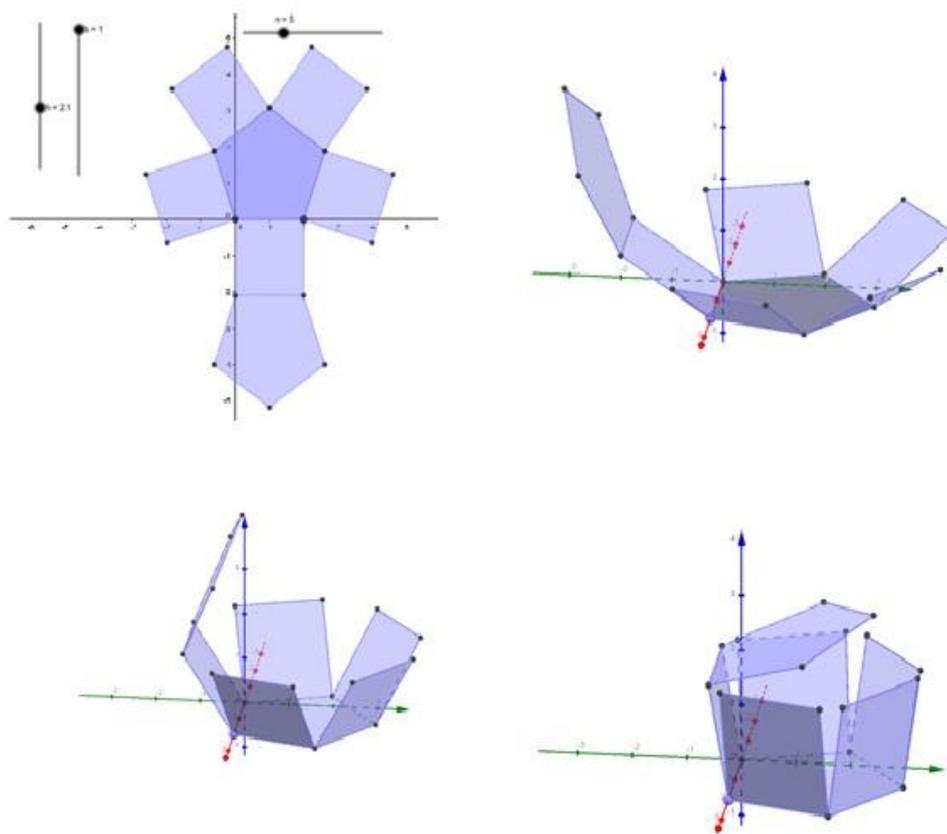
**Figura 1:** Primeiro passo da construção.  
**Fonte:** autores

2º passo – na janela 3D, construir um prisma de base determinada no passo anterior, e altura h.



**Figura 2:** Segundo passo da construção.  
Fonte: Autores.

Como desdobramento deste passo, foi realizada a planificação do sólido obtido. Foram exploradas, pelos grupos, as diversas possibilidades de valores de  $n$  e  $h$ , mediante a manipulação dos controles deslizantes. Outra experimentação realizada, neste momento, foi a animação possibilitada pelo controle deslizante gerado pelo *software*, relacionado aos estágios da planificação.



**Figura 3:** Planificação do prisma.  
**Fonte:** Autores.

Então, com essa construção, foi solicitado aos cursistas que elaborassem uma tabela mediante a variação de  $n$  (número de lados do polígono base), e relacionassem os respectivos elementos – vértices, arestas e faces  $n$  (Tabela 1).

**Tabela 1.** Elementos do prisma

Número de lados ( $n$ )	Vértices ( $V$ )	Arestas ( $A$ )	Faces ( $F$ )
3	6	9	5
4	8	12	6
5	10	15	7
6	12	18	8
7	14	21	9
8	16	24	10
9	18	27	11

**Fonte:** Autores.

A partir da Tabela 1, foi conduzida a investigação com base na pergunta 'aberta' – o que se observa nesta tabela? Isso ocasionou a discussão nos grupos, e as percepções: “*o número de arestas é sempre maior que o número de vértices ou faces; o número de vértices somados com o número de lados do polígono é igual ao número de arestas; o número de vértices varia de 2 em 2; o número de arestas varia de 3 em 3; o número de faces varia de 1 em 1*” [sic]. Na mediação, o professor questionou os cursistas sobre outras relações entre as colunas da tabela, ou seja, entre os elementos distintos (vértices, faces, arestas e número de lados do polígono). Com isso, após diversas investigações, conjecturas e refutações foi confirmado o padrão de regularidade: o número de vértices somado ao número de faces equivale ao número de arestas acrescido de duas unidades, isto é,  $V + F = A + 2$  (Relação de Euler).

O controle deslizante associado a altura  $h$  possibilitou ainda a experimentação mediante a correlação das janelas algébrica e gráfica, com exemplos de cálculo envolvendo o volume dos sólidos, a área dos polígonos, assim como o estudo de outras relações fundamentais.

Ao final foram apresentados os registros dos grupos sobre a atividade desenvolvida.

## **Resultados e discussões**

O desenvolvimento da atividade investigativa com os professores cursistas permitiu alguns apontamentos acerca da presente proposta. Com relação aos conhecimentos prévios, preconizados pela Investigação Matemática, apesar de já terem estudado a Relação de Euler, alguns cursistas não lembravam e realmente imergiram no processo. Quanto ao uso de tecnologia informática, foi identificado, com base no questionário aplicado que: dos 31 cursistas apenas 4 já haviam utilizado *softwares* educacionais no ensino da Geometria Espacial, e estes relataram que seus alunos demonstram interesse em aprender o conteúdo; os demais mencionaram que os alunos não apresentam interesse ou o interesse está condicionado ao uso de materiais manipuláveis; e todos responderam que a principal dificuldade na compreensão do conteúdo, pelos alunos, está relacionada a representação tridimensional estática. Cabe ressaltar que todos os cursistas já apresentavam algum conhecimento sobre o GeoGebra.

O trabalho com a Investigação Matemática pressupõe que o ponto de partida seja uma questão 'aberta' e que os alunos entendam a tarefa de investigar de tal forma que possam formular as suas questões e entender que o produto final consiste das respostas e da exposição

ao grupo (PONTE, BROCARDO E OLIVEIRA, 2009). Neste estudo foi solicitado aos cursistas a construção de prismas regulares, no GeoGebra 3D, a confecção de uma tabela com os elementos constitutivos, análise sobre estes elementos e a exposição das percepções/constatações/verificações ao grupo.

Os cursistas identificaram regularidades óbvias (na tabela) e levantaram outras questões, não tão óbvias, e o professor manteve-se como observador. Como exemplo, perceberam facilmente o padrão de regularidade em cada coluna da tabela, aumento progressivo do número de elementos e, passaram à investigação de relações entre as colunas, ou seja, entre os elementos constitutivos. Além disso, realizaram investigações envolvendo o controle deslizante  $h$ . Na Investigação Matemática estão implícitas nesta etapa a exploração e formulação de questões, a formulação de conjecturas, o teste e a reformulação de conjecturas e, ainda, a justificativa de conjecturas e a avaliação do trabalho.

De acordo com a proposta de Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), na etapa final da investigação cada grupo de cursistas apresentou os resultados obtidos dentre os quais destaca-se a fórmula de Euler. Nessa fase, os cursistas, moderados pelo professor, devem levar ao debate suas estratégias, conjecturas e justificativas. A fase de discussão é fundamental para que os estudantes entendam o que significa investigar, e desenvolvam a capacidade de argumentação e de comunicar-se matematicamente. Sem isso, corre-se o risco de perder o sentido da investigação.

## **Conclusões**

A atividade desenvolvida oportunizou aos cursistas perceberem que a Investigação Matemática, enquanto metodologia de ensino, pode ser incorporada em sala de aula, o que torna importante o seu estudo.

A vivência das etapas da introdução da tarefa, da realização da investigação individualmente, aos pares, ou em pequenos grupos e com toda turma, e da discussão dos resultados se completam, justificando a metodologia empregada. Além disso, percebeu-se uma forma dinâmica na aula, a participação e o interesse quando os cursistas colocam suas opiniões, levantam conjecturas e desenvolvem o conteúdo propiciado pelo tema.

Constatou-se ainda com a experimentação que as etapas da Investigação Matemática não são rígidas, isso porque uma vez que, na atividade com questão aberta, os pontos de partida na investigação podem ser diferentes então o processo e os pontos de chegada também podem ser distintos. Outro aspecto importante dessa experiência foi a oportunidade de refletir

sobre a ação desenvolvida e reconhecer que, ao se privilegiar uma postura interrogativa há melhora na relação professor-aluno. As reflexões permitem dizer que é desejável explorar as oportunidades, para isso basta estar atento, com foco delimitado previamente, porém com uma perspectiva aberta sobre outros tópicos de estudo que possam surgir.

A ferramenta tecnológica utilizada, GeoGebra 3D, veio ao encontro das necessidades relatadas pelos cursistas, no que se refere a representação dinâmica e tridimensional dos objetos geométricos, e cumpre o seu papel enquanto mídia tecnológica no ensino da matemática.

## Referências

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria dos métodos**. Porto: Porto Editora, LDA. 1994.

BORBA, M. C.; SILVA, R.S.R.; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em educação matemática: Sala de aula e internet em movimentos**. Belo Horizonte. Autêntica. 2014. 149p.

GATTI, B. A. Formação de Professores: condições e problemas atuais. **Revista Internacional de Formação de Professores (RIPF)**. v. 1, n. 1, p. 90-102, Itapetininga, 2016.

MAGINA, S. O Computador e o Ensino da Matemática. **Tecnologia Educacional**, v. 26, n. 140, p. 41-45, 1998.

MIRANDA, D. F.; LAUDARES, J. B. Informatização no Ensino da Matemática: investindo no ambiente de aprendizagem. **ZETETIKÉ**. v. 15, n. 27, p. 71-88, Campinas, 2007.

MORAN, J. M.; MASETTO, M. T.; BEHRENS, M. A. Novas tecnologias e mediação pedagógica. Campinas: Papirus, 2000.

OLIVEIRA, C. M. S.; VAZ, D. A. F. A investigação matemática com o software GeoGebra por meio do estágio supervisionado com pesquisa. In: **II Seminário de Pós-Graduação em Educação para Ciências e Matemática, XI Semana de Licenciatura**, 103., 2014, Jataí. Anais. Jataí: XI Semana de Licenciatura.

PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2009. 123p.

SILVA, L. P.; MACHADO, L. R. S. Inovações educacionais versus cultura escolar: as implicações dos paradigmas de formação docente e da incorporação do uso pedagógico das TICs aos processos escolares. **Conjectura: Filosofia e Educação**. v. 15, n. 2, p. 119-131, Caxias do Sul, 2010.



ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA  
Unioeste de Cascavel, 21 a 23 de setembro de 2017

SILVA, E. V. S.; LEIVAS, J. C. P. ; DAL RI, M. R. Explorando a espiral de Arquimedes com software de geometria dinâmica. **Renote: Novas Tecnologias na Educação**. Disponível em: <http://seer.ufrgs.br/index.php/renote/issue/view/2864/showToc>. Acesso em: 10 out. 2016.