

FABRICAÇÃO DE BISCOITO: UMA ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA

José Elias Pereira Calixto
Universidade Estadual do Norte do Paraná
joseelias_calixto@hotmail.com

Antonella Fernandes
Universidade Estadual do Norte do Paraná
antonella_f_95@hotmail.com

Camila Iorio Marton
Universidade Estadual do Norte do Paraná
cahhmarton@hotmail.com

Luana Carvalho dos Santos
Universidade Estadual do Norte do Paraná
luanacarvalho181@hotmail.com

Bárbara Nivalda Palharini Alvim Sousa
Universidade Estadual do Norte do Paraná
babipalharini@hotmail.com

Resumo:

Este artigo tem por objetivo descrever o desenvolvimento de uma atividade realizada por acadêmicos de um curso de Licenciatura em Matemática. A atividade de modelagem matemática teve como temática a produção de biscoitos de polvilho. Para realização desta atividade dados foram coletados por meio de uma visita a uma fábrica de biscoitos de polvilho na cidade de Sertãozinho, Paraná. Utilizamos aspectos metodológicos da metodologia qualitativa para descrição e reflexão da experiência com o uso da modelagem matemática no âmbito da disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias. Resultados apontam para as contribuições do uso de alternativas pedagógicas diferenciadas nas disciplinas que permeiam o a formação inicial de professores de Matemática, em particular, no uso de atividades de modelagem matemática.

Palavras-chave: Educação Matemática. Modelagem Matemática. Equações Diferenciais Ordinárias.

Introdução

O curso de graduação de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Norte do Paraná possui uma disciplina chamada Equações Diferenciais Ordinárias, presente na matriz curricular do terceiro ano de graduação, essa disciplina tem como objetivo fornecer subsídios aos discentes a fim de que possam aprender e utilizar equações diferenciais ordinárias, aplicar métodos de resolução a problemas que envolvem taxas de variação e o uso de conceitos e procedimentos associados às EDOs.

Nesse contexto, no ano de 2016, ao cursarem pela primeira vez a disciplina, os alunos da turma¹ trabalharam com aplicações de Equações Diferenciais Ordinárias envolvendo situações reais. Com esse objetivo, além de aprender a resolver problemas, os alunos foram instruídos a pesquisar alguma situação-problema do dia a dia em: fábricas, indústrias ou alguma produção, que ainda não tivesse sido estudada. A partir do direcionamento da atividade decidimos por conhecer uma fábrica de biscoitos, e nesse contexto buscamos: visitar o local, conhecer os processos que sofrem a matéria prima até se tornar o produto final, coletar todos os dados e em seguida estudar esses dados para, com base nisso elaborar ruma situação-problema e por meio de artifícios matemáticos resolvê-la com o uso dos conhecimentos apreendidos no decorrer da disciplina de EDO e da vida acadêmica. O tema escolhido para pesquisarmos foi à fabricação de biscoito de polvilho.

A fabricação de biscoitos de polvilho nos apresentou meios para construirmos a situação-problema e elaborarmos um modelo matemático para essa situação. A atividade consistiu da definição do tema, formulação da situação-problema, do levantamento de variáveis e da formulação de hipóteses, as quais nos conduziram ao uso de uma equação diferencial ordinária, sua solução analítica e interpretação com vistas à solução da situação-problema. Apresentamos neste artigo a atividade desenvolvida e o uso de leis físicas como a Lei de Resfriamento de Newton, a solução de um problema de valor inicial e o método de resolução para equações diferenciais ordinárias separáveis.

Diante das explicações que nos levaram a chegar neste tema, temos o objetivo geral: compreender e analisar a produção de biscoitos de polvilho, explorando todas suas particularidades para assim trazer isso para a disciplina de equações diferenciais ordinárias por meio da modelagem matemática.

Neste artigo, abordamos a experiência que tivemos em relação à compreensão e análise da produção de biscoitos. E por fim, tecemos reflexões sobre a experiência com uma atividade de modelagem matemática na disciplina de equações diferenciais ordinárias. Nesse percurso, enfatizamos a complexidade de uma atividade como essa, pois é preciso desenvolvê-la de maneira cautelosa e detalhista, já que todas as informações coletadas se tornam a base para a formulação de uma situação-problema, para a elaboração de um modelo matemático e a resposta para essa situação do mundo real.

¹ Neste artigo, os quatro primeiros autores eram discentes da disciplina e a quinta autora a professora responsável.

Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática e seu uso na disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias

A Modelagem Matemática na Educação Matemática é definida por vários autores, na literatura encontramos diferentes definições que apresentam características em comum como a definição apresentada por Bassanezi (2006, p.16) que define modelagem matemática como “a arte de transformar problemas reais em matemáticos e resolve-los, interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”.

Já para Almeida, Silva e Vertuan (2012) a Modelagem Matemática na Educação Matemática é definida como uma alternativa pedagógica em que, por meio da Matemática, resolvemos um problema não essencialmente matemático. Para estes autores, uma atividade de modelagem matemática parte de uma situação inicial para uma situação final, e no decorrer da atividade diferentes procedimentos são necessários, como, a inteiração com o tema da atividade, a tradução da linguagem natural (na qual está o problema) para a linguagem matemática, a resolução do problema utilizando de artifícios, procedimentos e modelos matemáticos, e a interpretação e validação dos resultados matemáticos na situação-problema inicial, cuja origem não está na Matemática.

Dentre essas classificações é de grande proveito ressaltar os procedimentos para se realizar uma atividade de Modelagem Matemática, os autores sinalizam a importância da: Interação: reconhecimento da situação-problema e a familiarização do assunto a ser modelado; Matematização: formulação do problema, com base em hipóteses, por meio da transferência de linguagens; Resolução: em que modelos matemáticos são necessários; Interpretação e validação: em que se interpreta a solução obtida por meio de modelos matemáticos. Nos casos em que a validação do modelo não confere é preciso o retorno a matematização para se chegar a uma solução aceitável (ALMEIDA, SILVA, VERTUAN, 2012).

Segundo Bassanezi (2002, p.17) “a Modelagem aplicada ao ensino pode ser um caminho para despertar maior interesse, ampliar o conhecimento do aluno e auxiliar na estruturação de sua maneira de pensar e agir”. Desta forma, vemos que a Modelagem Matemática pode auxiliar no desenvolvimento dos alunos, em particular, na capacidade de resolver problemas por meio de Matemática, visto que busca, entre outras coisas, traduzir informações reais do cotidiano para a linguagem matemática, proporcionando ao aluno uma visão do que vem a ser a matemática presente no dia a dia.

Nesse sentido, Almeida, Silva e Vertuan (2012, p.26) descrevem momentos de familiarização para a introdução de atividades de modelagem matemática nas salas de aula:

Momento 1: O professor coloca o aluno em contato com uma situação-problema, juntamente com os dados e as informações necessárias. A investigação do problema, a dedução, a análise e a utilização de um modelo matemático são acompanhadas pelo professor.

Momento 2 : Uma situação-problema é sugerida pelo professor aos alunos, e estes, divididos em grupos, complementam a coleta de informações para a investigação da situação e realizam a definição de variáveis e a formulação das hipóteses simplificadoras, a obtenção e validação do modelo matemático e seu uso para a análise da situação. O que muda, do primeiro momento para o segundo é a independência do estudante no que se refere a definição de procedimentos extramatemáticos e matemáticos adequados para a realização da investigação.

Momento 3: Os alunos, distribuídos em grupos, são responsáveis pela condução de uma atividade de modelagem, cabendo a eles a identificação de uma situação-problema, a coleta e análise de dados, as transições de linguagem, a identificação de conceitos matemáticos, a obtenção e validação do modelo e seu uso para a análise da situação, bem como a comunicação desta investigação para a comunidade escolar (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2013, p. 26).

Do primeiro ao terceiro momento é possível dizer que os momentos de familiarização podem proporcionar aos alunos o desenvolvimento de habilidades e capacidades, possibilitando o entendimento e o desenvolvimento das atividades, bem como a familiaridade dos mesmos com tais atividades. Esses momentos foram seguidos pela professora da disciplina do início ao final do ano letivo na disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias.

Quando a ideia é estudar os conteúdos de uma disciplina específica, por meio da Modelagem Matemática, é preciso familiarizar os alunos para que possam compreender a dinâmica da modelagem (BASSANEZI, 2009). Antes de entendermos a importância da Modelagem Matemática nesta disciplina definiremos o que é modelo. De acordo com Bassanezi (2011, p. 19), chamamos de “modelo matemático um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado”. Podendo ser calculados de acordo a natureza dos fenômenos ou das situações analisadas. Com tudo observamos que as equações diferenciais podem ser definidas como modelos matemáticos para modular problemas advindos de situações reais.

Equações Diferenciais Ordinárias

Na Modelagem Matemática o estudo de Equações Diferenciais Ordinárias, coincidentemente também obteve o seu início na matemática aplicada, pois foi a partir da necessidade de compreender problemas e descrever processos de mudanças que surgiram essas equações, que de certo modo se tornaram indispensáveis no decorrer dos anos, tanto para pesquisadores matemáticos de outras áreas como também para professores que utilizam da Modelagem Matemática em suas aulas e professores universitários que trabalham com a disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias em conjunto com a Modelagem Matemática (BASSANEZI, 2011).

As equações diferenciais geralmente são usadas para descrever processos de mudanças que ocorrem em diferentes meios, como o da biologia e o da física, dentre outros. São vários os matemáticos que usufruíram deste artifício, como por exemplo Isaac Newton que além de trazer grandes contribuições para física, também contribuiu para a Matemática. Uma de suas contribuições refere-se a troca de calor entre corpos, em que por meio do uso da modelagem matemática é possível obter uma equação diferencial ordinária (BASSANEZI, 2011).

Uma equação que contém as derivadas (ou diferenciais) de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma ou mais variáveis independentes é chamada de equação diferencial. Essas apresentam classificação por tipo, sendo dois tipos: as equações diferenciais ordinárias, que envolvem derivadas de uma função de uma só variável independente e as parciais, em que diferente das equações ordinárias envolve a derivada de uma função com mais de uma variável independente (ZILL, 2003).

Ao trabalhar a disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias com Modelagem Matemática ocasionalmente trabalhamos com modelos clássicos provenientes da física, química, biologia, entre outras possibilidades. Nesse contexto, criamos um processo em que se recriam ideias quando aplicadas à realidade. De modo geral, para formularmos um problema é adequado pensarmos no uso de variáveis contínuas evoluindo em relação a outras variáveis contínuas. Observando o comportamento destas chega-se a variável independente e a variáveis dependentes, que podem ser obtidas por meio de hipóteses formuladas a respeito as taxas de variações apresentadas (BASSANEZI, 2011).

Quando nos propomos a trabalhar com modelos matemáticos por meio de Equações Diferenciais Ordinárias, nem sempre obtemos soluções analíticas, são poucas as Equações Diferenciais que permitem uma solução explícita. Neste artigo, apresentamos, por meio da atividade de modelagem matemática descrita, a possibilidade de trabalhar com o modelo de resfriamento associado à Lei de Resfriamento de Newton, bem como o estudo de uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem.

Aspectos Metodológicos

De acordo com os objetivos apresentados nesse artigo, classifica-se essa pesquisa quanto à natureza como qualitativa, pois a pesquisa qualitativa está associada ao contato direto do pesquisado com o ambiente ou a situação que está sendo investigada.

De acordo com Bogdan e Biklen (2003), o conceito de pesquisa qualitativa envolve cinco características básicas: o ambiente natural, os dados essencialmente descritivos, a preocupação com o processo, com os significados atribuídos e um processo de análise indutivo.

A partir das considerações apresentadas, sobre a pesquisa de cunho qualitativo e relacionada com a experiência apresentada, concluímos que foram utilizadas as características básicas de uma pesquisa qualitativa. Vemos, em nossa experiência, um ambiente natural, o envolvimento dos sujeitos com a investigação, e a relação concreta entre o pesquisador, o ambiente e a investigação.

Ainda, segundo Bogdan e Biklen (2003), a pesquisa qualitativa envolve a obtenção de dados descritivos, obtidos no contato direto do pesquisador com a situação estudada, e enfatiza-se mais o processo do que o produto e se preocupa em retratar a perspectiva dos participantes.

Relato de uma experiência: uma atividade de modelagem matemática desenvolvida na disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias

Durante a disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias, fomos familiarizados com diversas atividades que envolvem a modelagem matemática, foram várias aulas para que ocorresse uma compreensão do que vem ser uma atividade de modelagem matemática. Segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012, p.12), de modo geral, “uma atividade de modelagem matemática pode ser descrita em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a situação final”.

Dentre as atividades propostas, vamos destacar duas: a atividade do resfriamento da cerveja, que envolve a lei do resfriamento e a atividade a respeito do Bungee jump, que utiliza a segunda lei de Newton e a lei do Hooke, que envolve uma constante elástica. A atividade do resfriamento da cerveja se caracteriza por uma atividade de equação diferencial ordinária de 1º ordem, já a atividade sobre o bungee jump, se caracteriza por uma atividade que envolve equação diferencial ordinária de 2º ordem. Segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012), os

elementos que caracterizam uma atividade de modelagem matemática são: no início, uma situação-problema; os procedimentos de resolução não são predefinidos e as soluções não são previamente conhecidas; ocorre a investigação de um problema; conceitos matemáticos são introduzidos ou aplicados; ocorre a análise da solução.

A partir dessas atividades, foi proposto pela professora regente da disciplina, que os alunos desenvolvessem uma atividade de modelagem matemática possível de ser resolvida por meio de equações diferenciais ordinárias. O desenvolvimento da atividade está associado à formulação de um problema, a elaboração de um modelo matemático e a resposta a uma situação-problema.

Diante dessas circunstâncias, nos reunimos e pensamos sobre algo que esteja próximo de algum de nós, como por exemplo a fabricação de tijolos, que era a nossa ideia inicial, mas como não conseguimos os dados necessários, continuamos a realizar pesquisas a respeito relacionadas à fabricação de itens, nas cidades em que cada integrante do grupo reside. Assim chegamos na conclusão de que iríamos fazer algo relacionado com a fabricação de biscoitos de polvilho. Foram várias discussões, sobre como formular o problema, o que iríamos utilizar dos dados coletados, até chegamos no tema associado à preparação do biscoito de polvilho, buscamos, então, informações em relação às quantidades adequadas dos ingredientes, e sobre a temperatura considerada ideal para assar o biscoito. Além de levarmos em conta toda a estrutura que uma empresa de biscoitos deve apresentar. Diante da escolha do tema, preparamos a coleta da dados:

Coleta de Dados

Foram coletados dados de três empresas que fabricam biscoito de polvilho, todas são do município de Sertãozinho, região metropolitana de Londrina, no Estado do Paraná. Os dados são referente ao funcionamento em geral da empresa, com ênfase na fabricação do biscoito de polvilho, para coletarmos os dados, ocorreu a formulação de perguntas para os funcionários das empresas. Duas alunas foram até essas empresas, e apenas uma das três conseguiu respostas às perguntas e a disponibilização do acesso a empresa, mas a empresa não permitiu fotos, nem o acesso ao processo de fabricação do biscoito de polvilho, as outras duas empresas não quiseram ou não souberam responder as perguntas propostas, diante dos fatos utilizamos nesse processo a coleta de dados realizada apenas em uma empresa.

Os dados coletados são referentes ao tempo que leva para se fabricar esse produto, qual a temperatura ideal, qual o custo do produto, o lucro total da produção, a relação da quantidade de funcionários e a variação do salário dos mesmos. Todas as perguntas foram respondidas pelo

administrador da empresa. Atualmente a empresa possui 60 funcionários registrados, que possuem um salário que varia de R\$1.800,00 a R\$ 4.000,00, são fabricados por dia 25.000 biscoitos de polvilho, e em média é necessário uma hora para fabricar um pacote de 765 gramas de biscoito de polvilho. Em relação a temperatura ideal para assar os biscoitos, como são vários tipos de fornos, esta pode variar de 195°C a 210°C. A empresa não permitiu que tirássemos fotos do local, mais disponibilizou as fotos que constam no site.

Diante dos dados que possuíamos, formulamos um problema e em seguida elaboramos um modelo matemático visando solucionar o problema formulado. De posse dos dados, foi necessário praticamente um mês para que decidíssemos o que pesquisar, ou seja, para a formulação do problema. Inicialmente pensamos em cinco problemas e depois de várias discussões decidimos formular o nosso problema em relação a temperatura e o tempo.

Situação-Problema:

Em uma fábrica de Biscoito de Polvilho, onde trabalham 60 funcionários foi analisada a produção de biscoitos, todas as etapas que ele sofre desde matéria prima até se tornar o biscoito que conhecemos, a temperatura do dia em que foi realizada a pesquisa era exatamente 25°C. Sabemos que o biscoito entra ao forno pré-aquecido a 220°C e após 20 minutos de forno o biscoito está a uma temperatura de 135°C. Após 1 Hora de forno o biscoito foi retirado, qual era sua temperatura neste momento? Foi assado conforme as instruções emitidas pela fábrica?

As variáveis estudadas com relação à situação-problema foram definidas como:

Definição de Variáveis

T: temperatura (°C)

t: tempo (min)

sendo o tempo a variável independente, e a temperatura a variável dependente.

Com isso fizemos a coleta de dados, tendo como nossa temperatura no tempo 0 minuto correspondendo a 25°C, a temperatura no tempo 20 minutos correspondendo a 135°C, e queremos saber a temperatura no tempo 60 minutos. Ou seja, dados $T(0) = 25^\circ \text{C}$, $T(20) = 135^\circ \text{C}$, queremos determinar $T(60) = ?^\circ \text{C}$.

A partir dessas ações começamos a investigação matemática em busca de um modelo matemático que nos auxiliasse no entendimento da situação-problema e na busca por sua solução. Para tanto, formulamos hipóteses que guiaram a resolução do problema:

Formulação de hipótese: Para analisar a temperatura do biscoito no forno, consideramos o uso da lei de resfriamento de Newton, a qual considera que a variação da temperatura de um corpo é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo, em qualquer instante de tempo, e a temperatura ambiente.

Sobre a Lei de Resfriamento de Newton, Bronson (2008, p.64), afirma que “a taxa de variação temporal da temperatura de um corpo é proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e o meio circundante”.

De acordo com Bassanezi e Ferreira (1988, p.07), “um corpo sem fonte interna de calor deixado em um ambiente com temperatura T , sua temperatura tende a entrar em equilíbrio com a temperatura do ambiente T_a . Se $T < T_a$ este corpo se aquecerá, mas no caso contrário, onde $T > T_a$ ele resfriará”. Como a temperatura de um corpo é considerada uniforme, podemos considerá-la como uma função do tempo, ou seja, $T = T(t)$, em que quanto maior for $|T - T_a|$, mais rápida será a variação $T(t)$.

Assim, tem-se:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_a)$$

Para fazermos a matematização da situação-problema por nós delineada, a partir da leitura da lei de resfriamento de Newton interpretamo-la com base nos dados coletados e na linguagem matemática, obtendo a equação diferencial ordinária:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 220)$$

Com a EDO alterada com os dados do problema iniciamos o processo de resolução. Identificamos que a EDO é de primeira ordem e é possível separar as variáveis. Desse modo, separávamos as variáveis, para que assim pudessemos utilizar o recurso ao Teorema Fundamental do Cálculo, integrando ambos os lados da EDO:

$$\int \frac{dT}{T - 220} = \int k \cdot dt$$

A solução da equação nos dá uma função que relaciona a temperatura em relação ao tempo: $T - 220 = c \cdot e^{kt}$, sendo c e k constantes pertencentes ao conjunto dos números reais.

De posse deste modelo matemático, usamos os dados do problema para elaborar um problema de valor inicial e obter a constante c :

$$\begin{cases} T(t) = 220 + c \cdot e^{kt} \\ T(0) = 25 \end{cases}$$

Resolvendo o Problema de Valor Inicial, obtemos que $c = -195$, ou seja, $T(t) = 220 - 195 \cdot e^{kt}$. Utilizando os dados para as temperaturas nos tempo 20 min e 60 min, obtemos $k = -0,0415$, e assim $T(t) = 220 - 195 \cdot e^{-0,0415t}$.

Agora que já apresentamos ambas as constantes substituímos o tempo 60 no nosso modelo.

$$T(60) = 220 - 195 \cdot e^{-0,0415 \cdot 60}$$

E com isso notamos que após 1 hora de forno o biscoito estava com uma temperatura de 203,8 °C. Para validar as informações obtidas por meio da teoria matemática com relação ao modelo de resfriamento, utilizamos informações coletadas na empresa, que havia nos informado que a temperatura para preparo do biscoito varia entre 195°C a 210 °C. Desse modo, é possível dizer que a aferição do forno está correta e os recursos matemáticos para resolução do problema formulado são válidos para essa situação.

Reflexão com relação a atividade desenvolvida

A utilização da modelagem matemática nas aulas de EDO auxiliaram no processo da criação de modelos, coleta de dados, validação e interpretação de situações reais. Tal auxílio se dava, pois a professora trazia situações do cotidiano, fazendo sempre que buscássemos mais dados, formulássemos hipóteses diversas para o entendimento das situações-problema e para a matematização e resolução dos mesmos. A partir das atividades de modelagem matemática desenvolvidas nas aulas da disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias podemos perceber que diferentes métodos podem ser compreendidos e executados de maneiras amplas com a utilização das EDO em conjunto com a modelagem matemática.

A partir disso, para a realização da atividade de modelagem matemática seguimos os passos de Almeida, Silva e Vertuan (2012, p.15), que “envolve fases relativas ao conjunto de procedimentos necessários para configuração, estruturação e resolução de uma situação-problema as quais caracterizamos como: inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação”.

No primeiro passo, a inteiração, associamos a nossa situação-problema, para que assim pudéssemos ter compreensão do que o problema estava pedindo, e com isso buscássemos hipóteses para a realização deste modelo. No segundo passo, sobre a matematização, transformamos a nossa situação-problema, que estava em uma linguagem natural, e passamo-

la para a linguagem matemática, criando as nossas hipóteses e definindo assim as nossas variáveis. No terceiro passo, da resolução, começamos a desenvolver nosso modelo matemático, para que descrevesse nossa situação problema, e com isso analisamos os principais aspectos pedidos na situação para que assim, respondêssemos a pergunta formulada. No último passo, a interpretação de resultados e a validação, após resolvermos o modelo, analisamos os resultados dados pelo modelo, e comparamos com as perguntas feitas na fábrica, e assim validamos o nosso modelo.

No quarto ano do curso de Licenciatura em Matemática, quando em contato com a disciplina de Introdução à Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática foi possível validar os procedimentos por nós realizados enquanto alunos na disciplina anterior.

Experiências no que tange ao uso de atividades vistas como alternativas pedagógicas para o ensino de Matemática podem servir como exemplos e incentivos para que nossa prática pedagógica enquanto futuros professores seja diferenciada e permeada do uso de diferentes abordagens dos conceitos matemáticos em sala de aula.

Referências

ALMEIDA, L.M.W.; SILVA, K.A.P.; VERTUAN, R.E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Editora Contexto, 2012.

BASSANEZI, R. C. **Ensino e Aprendizagem com Modelagem Matemática**. São Paulo: Editora Contexto, 2002.

BASSANEZI, R. C. **Ensino e Aprendizagem com Modelagem Matemática: Uma nova estratégia**. 3 ed. São Paulo: Editora Contexto, 2006.

BASSANEZI R. C. **Ensino e Aprendizagem com Modelagem Matemática**. São Paulo: Editora Contexto, 2009.

BASSANEZI, R. C. **Ensino- aprendizagem com Modelagem Matemática**. 3 ed. São Paulo: Editora Contexto, 2011.

BASSANEZI, R. C.; FERREIRA W. C. **Equações Diferenciais com Aplicações**. São Paulo: Editora Harbra, 1988.

BIEMBENGUT, Maria Sallet; HEIN, Nelson. **Modelagem Matemática no Ensino**. São Paulo: Editora Contexto, 2005.

BOGDAN, R. S.; BIKEN, S. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. 12.ed. Porto: Porto, 2003.



BRONSON, R. COSTA, G. **Equações diferenciais**, 3 ed. Porto Alegre: Editora Bookman, 2008.

ZILL, D. G. **Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.