USO DA MODELAGEM MATEMÁTICA PARA O CÁLCULO DA PERDA DE ÁGUA NA DISTRIBUIÇÃO EM URAÍ-PR

Ingrid Rodrigues Pimentel
ingridr_pimentel@hotmail.com
Universidade Estadual do Norte do Paraná

Jennyfer Thays dos Reis
jennyferthaysreis@gmail.com
Universidade Estadual do Norte do Paraná

Lyncon Rafael de Oliveira
lynconoliveira@gmail.com
Universidade Estadual do Norte do Paraná

RESUMO

O seguinte trabalho tem como objetivo apresentar o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática elaborada na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Norte do Paraná. O tema *cálculo da perda de água na distribuição em Uraí*, foi escolhido pelo grupo devido a algumas notícias advindas do site da Sanepar em relação ao tema e a proximidade de uma integrante do grupo com a empresa estatal. A situação-problema elaborada pelo grupo consiste em elaborar um modelo matemático para prever a perda de água,ocorrida no abastecimento da cidade, no decorrer do tempo. Dados e informações coletadas na empresa, referente a cidade de Uraí, PR, possibilitaram uma análise e investigação com base em conceitos matemáticos para responder a situação-problema investigada. Por meio de um modelo matemático exponencial assintótico inferimos a respeito da perda de água na região urbana da cidade e realizamos uma análise por meio dos conceitos de cálculo diferencial e integral. Neste contexto, a vivência com a atividade de modelagem matemática aproximou os alunos de problemas reais e possibilitou a aplicabilidade de conceitos trabalhados na disciplina do curso de Licenciatura em Matemática.

Palavras-chave: Modelagem Matemática; Cálculo Diferencial e Integral; Perda de água.

INTRODUÇÃO: O USO DA MODELAGEM MATEMÁTICA

A modelagem matemática pode ser considerada uma alternativa pedagógica para o ensino e a aprendizagem da matemática em diferentes níveis de escolaridade (ALMEIDA, SILVA, VERTUAN, 2012). De modo geral, uma de suas finalidades é enriquecer as práticas de sala de aula, dando ênfase a assuntos presentes no cotidiano. Para Mendonça (1993, p.13):

> A Modelagem Matemática é vista como um processo de sentido global que tem início numa situação real problematizada, para a qual buscaremos a solução através de um modelo matemático que traduzirá em linguagem matemática as relações naturais do problema de origem.

Diferentes são as fases que compreendem uma atividade de modelagem matemática, e entre elas há um conjunto de procedimentos desenvolvidos pelos modeladores na investigação da situação-problema. De acordo com Almeida, Silva e Vertuan (2012), a partir da inteiração com o tema da atividade de modelagem matemática, é necessário que a coleta de dados e as informações acerca do fenômeno pesquisado permitam a transição da linguagem do problema para a linguagem matemática. Já no uso da linguagem matemática, a fase de resolução permite com que os sujeitos engajados na atividade usem de procedimentos matemáticos com vistas à obtenção e análise de um modelo matemático, a partir do qual será possível responder a situação-problema colocada, interpretar e validar as respostas obtidas face à situação inicial.

Tendo como pressuposto o estudo de uma situação-problema do cotidiano, em um grupo de três alunos do curso de Licenciatura em Matemática, no contexto da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, a pedido da professora da disciplina, decidimos investigar a ocorrência de perda de água na distribuição de água feita pela Sanepar na região de Uraí.

Neste relato de experiência, apresentamos na introdução aspectos da modelagem matemática, e na seqüência indicamos como se deu a atividade desenvolvida, a escolha do tema, a situação-problema, o histórico da cidade de Uraí, sobre a Sanepar, a análise de dados e resolução da situação-problema, bem como a exposição das previsões segundo o modelo, o uso de conceitos de cálculo diferencial e integral na atividade e, por fim, as considerações finais acerca do desenvolvimento da atividade de modelagem matemática e sua contribuição no processo formativo dos alunos modeladores.

ESCOLHA DO TEMA E SITUAÇÃO-PROBLEMA

Com o objetivo de investigar uma situação real, a partir da proposta na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, o grupo foi em busca de temas que compreendessem problemáticas reais. No início da atividade não havia uma idéia construída a respeito de modelagem matemática, mas como alunos da disciplina de Cálculo já havíamos sido apresentados à diferentes temas e desenvolvido outras atividades de modelagem matemática sob orientação da professora da disciplina.

Tivemos algumas idéias de pesquisa, poucas, pois não tínhamos familiaridade com atividades abertas, mas a motivação veio da facilidade que uma integrante se dispôs a coletar dados em seu local de trabalho, a SANEPAR-PR, e a partir dos dados coletados na empresa poderíamos investigar matematicamente uma situação real. Assim, com os problemas mundiais sobre desperdício de água, surgiu a necessidade de fazer uma pesquisa sobre o nível de perda de água na distribuição feita pela SANEPAR.

Após escolha do tema, a escolha da localidade foi designada ao depararmos com a cidade que apresenta maior implicações na perda de água em sua distribuição, constatou-se então que Uraí é uma das cidades mais problemáticas da região segundo dados extraídos de documentos da SANEPAR.

A situação-problema inicial foi então *elaborar um modelo que apresente previsões da perda de água ao decorrer de muitos anos*.A construção dessa situação-problema ocorreu com a intenção de conscientizar moradores da região de Uraí, assim como os leitores do trabalho e chamar atenção principalmente da empresa para possíveis melhorias para que o volume de água perdido não venha a aumentar.

CONTEXTUALIZANDO A SITUAÇÃO PROBLEMÁTICA

De acordo com o IBGE, Uraí é uma pequena cidade com 11.472 habitantes localizada ao norte do estado do Paraná à 15km de Cornélio Procópio. As terras onde hoje se localiza o Município de Uraí pertenciam à Companhia Nambei Tochi Kabushiri Kaisha, e faziam parte do território do Município de Assaí. Em 1943 a cidade foi elevada à categoria de Distrito Administrativo do Município de Assaí, com a denominação de Uraí, e em 1947, passou à condição de Município autônomo. O nome "Uraí", originou-se de uma planta da qual os aborígenes extraíam o curare, um veneno do qual os primeiros moradores, que eram de maioria origem japonesa, untavam suas flechas e lanças, para se defenderem dos inimigos.

Já a empresa SANEPAR é uma empresa estatal e produz água tratada para 345 municípios no Paraná e um em Santa Catarina. Mais de 10,8 milhões de pessoas são atendidas com o serviço de abastecimento de água e 7,1 milhões com serviços de esgotamento sanitário. É considerada uma das maiores estruturas do Brasil em saneamento básico.São 168 Estações de Tratamento de Água e mais de 47 mil quilômetros de rede de distribuição, o que equivale a dar mais de uma volta no globo terrestre[1].

[1] Informações disponíveis em: <site.sanepar.com.br>. Acesso em 03 de outubro de 2018.

Para trabalhar a perda de água na cidade de Uraí, inicialmente, em debates do grupo, supomos que nossa assíntota para a questão seria o valor de água distribuída, porém analisamos e concluímos que seria muito pessimista considerar que em algum momento toda a água distribuída seria perdida, fomos então a busca de mais informações sobre, e após relatos de uma profissional da empresa, no qual destaca um ponto considerável para a resolução desta situação, onde explica um critério imposto da empresa para que a perda de água não seja maior que 40% da quantidade distribuída e evidencia ainda que esse é um percentual que tende a decair com o passar do tempo.

Partindo disso, adotamos o percentual atual como hipótese e ignoramos o fato de que o mesmo diminua.

Hipótese 1: O volume perdido nunca ultrapassará 40% do volume distribuído

INVESTIGANDO OS VAZAMENTOS NA TUBULAÇÃO

Os vazamentos são os fatores principais na perda de água e podem ocorrer em qualquer ponto da tubulação. Um buraco em um tubo do encanamento de 2 milímetros pode desperdiçar 3,2 mil litros em um dia. Os vazamentos mais comuns são tubulações rachadas e há também os vazamentos ocultos subterrâneos que são aqueles que não são visíveis em que a empresa de distribuição detecta para solução do mesmo, e os vazamentos nas residências, que passam a ser responsabilidade do consumidor e muitas vezes, exigem os serviços de um encanador.

As perdas são computadas como reais ou aparentes; a “perda de água física” ou “real” acontece quando o volume de água disponibilizado no sistema de distribuição pelas operadoras de água não é utilizado pelos clientes, sendo desperdiçado antes de chegar às unidades de consumo, e a “perda de água comercial” ou “aparente” ocorre quando o volume utilizado não é devidamente computado nas unidades de consumo, sendo cobrado de forma inadequada, mais informações podem ser vislumbradas no Quadro 1.

Quadro 1: Características reais e aparentes da perda de água

Itens	Características Principais	
	Perdas Reais	Perdas Aparentes
Tipo de ocorrência mais comum	Vazamento	Erro de Medição
Custos associados aos volumes de água perdidos	Custo de produção	Tarifa
Efeitos no Meio Ambiente	- Desperdício do Recurso Hídrico. - Necessidades de ampliações de mananciais.	-
Efeitos na Saúde Pública	Risco de contaminação	-
Empresarial	Perda do Produto	Perda de receita
Consumidor	- Imagem negativa (ineficiência e desperdício)	-
Efeitos no Consumidor	- Repasse para tarifa - Desincentivo ao uso racional	- Repasse para tarifa - Incitamento a roubos e fraudes

Fonte: Disponível em: <https://www.adb.org/site/funds/funds/ppiaf>. Acesso em 03 de out de 2018.

Na investigação categorizamos as perdas de água de responsabilidade da empresa como perda real, já as perdas aparentes são as perdas que são de responsabilidade do cliente, ou seja, vêm contabilizadas na conta de água.

Partindo desse entendimento, os dados coletados pelos autores foram tratados e dispostos em tabelas. O Volume Produzido (VP) subtraindo Volume Micromedido (VM) resulta na perda mensal, foi calculada a média para cada ano referindo-se às perdas para possibilitar a análise de como estava se comportando essa possível função e ainda foi feita a conversão da medida para mil metros cúbicos, para facilitar o manuseio, com algarismos menores (Tabela 1).

Tabela 1 – Média anual de perda de água

Tempo	Variável auxiliar	Média anual de perdas de água	Média em mil m^3
2010	0	15297,0474	15,30
2011	1	16339,24873	16,34
2012	2	19962,37477	19,96
2013	3	24396,12128	24,40
2014	4	23106,93438	23,11
2015	5	24839,1574	24,84
2016	6	24908,88119	24,91

Fonte: Elaborada pelos autores.

Após a obtenção da tabela 1, foi feita a análise no crescimento da perda de água, para a identificação de uma possível relação matemática entre os dados, com um intuito de julgar se esse fenômeno matemático se aproximava de um crescimento geométrico ou um crescimento aritmético (Tabela 2).

Tabela 2 – Análise do crescimento da função

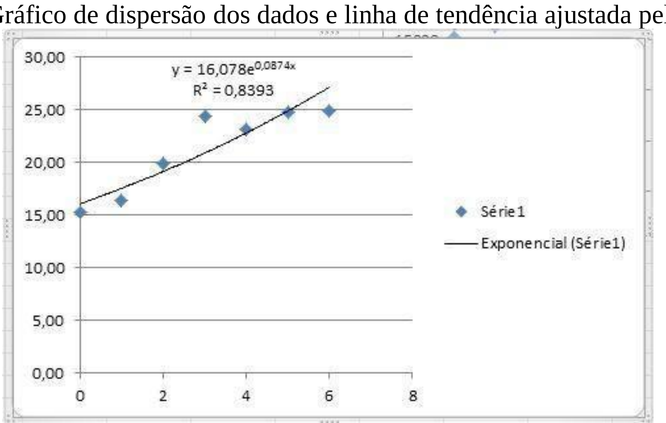
Análise da variação aritmética	Análise da variação geométrica
0,78	1068,131
1,21	1221,744
-0,81	1222,105
-3,50	947,156
-0,30	1074,966
0,05	1002,807
2,25	0

Fonte: Elaborada pelos autores.

De acordo com a Tabela 2, o crescimento da função em quesito aritmético apresenta oscilações relevantes, enquanto geometricamente os valores estavam seguindo uma linha de aproximação contínua e aproximada o que nos permitiu hipotetizar que o crescimento geométrico pode descrever a tendência dos dados matematicamente. Neste fenômeno, podemos considerar ainda que trabalhamos com variáveis contínuas, sendo que a perda de água ocorre no decorrer do tempo indefinidamente.

O tratamento dos dados coletados e a investigação de uma linha de tendência para o crescimento dos dados também foi feita via ajuste por meio do *software* excel (Figura 1).

Figura 1- Gráfico de dispersão dos dados e linha de tendência ajustada pelo *software*



Fonte: Elaborado pelos autores.

O modelo matemático ajustado pelo *software* é um modelo exponencial do tipo:

$$F(x) = b.e^{(k.x)}$$

$$F(x) = 16{,}078.e^{(0{,}0874.x)}$$

Com a intenção de verificar se essas previsões se aproximavam dos dados reais já obtidos dos documentos da empresa, e de fato a função atendia às expectativas, as médias anuais dos documentos estavam próximas das obtidas pelo modelo, uma validação do modelo matemático foi feita por meio dos cálculos da Tabela 3.

Tabela 3 – Validando o modelo $F(x) = 16{,}078e^{(0{,}0874.x)}$

Tempo	**Variável auxiliar**	**Média anual de perdas de água**	**Média em mil m³**	**Utilizando o modelo $F(x) = 16,078e^{(0,0874.x)}$**
2010	0	15297,0474	15,30	16,08
2011	1	16339,24873	16,34	17,55
2012	2	19962,37477	19,96	19,15
2013	3	24396,12128	24,40	20,90
2014	4	23106,93438	23,11	22,81
2015	5	24839,1574	24,84	24,89
2016	6	24908,88119	24,91	27,16

Fonte: Elaborada pelos autores.

Com essa análise e verificação, em debate pelo grupo foi identificado que deveria ter um valor de máximo para a quantidade de vazamento, e no caso, seria o volume de água micro medido. Por questão de lógica, o volume de água perdido nunca poderá ultrapassar o volume de água distribuído pela empresa. Como seria pessimista perder praticamente toda a quantidade de água distribuída em algum momento, então optamos por reformular esse "máximo". Partindo disso fomos em busca de novas informações, e através de relatos de uma profissional da empresa onde afirma que o valor máximo de água perdida é variável dependendo da cidade, e o caso particular de Uraí atualmente é estabelecido a taxa de 40% da quantidade distribuída e tende a diminuir ao longo dos anos assim como nas outras cidades que a empresa também faz a distribuição de água.

Realizado o cálculo da média do volume produzido adotamos 40% deste valor como valor de limite para essa função. Essa média resultou no valor de: 59785,65m³; e reduzindo-o em mil metros cúbicos, temos a média: 59,78 mil m³ aplicando a porcentagem desejada obtemos o valor de 23,912 mil m³ que é o limite de água distribuída que "pode" ser perdida, ou seja, a assíntota da função. Dizemos que uma reta s é uma assíntota quando o limite da função com sua variável tendendo ao mais ou menos infinito for o valor da reta s.

Pela constatação anteriormente realizada, de que se tratava de uma função exponencial, agora teria de ter um valor limitante. Então foi necessário o uso da função exponencial assintótica, ou seja, $F(x) = a + b.e^{(k.x)}$ para os ajustes serem feitos de maneira mais adequada, de maneira que a escolha do ano analisado não interfira com um resultado errôneo.

Foram substituídos os valores da assíntota $a = 23{,}912$, da função quando o $x = 1$ de $F(x) = 15{,}3$ e obtivemos $b = -8{,}61$ e $k = 0{,}13$ (Figura 2).

Figura 2- Cálculo dos parâmetros da função

$$F(x) = 23{,}912 + b.e^{(x.k)}$$
$$15{,}3 = 23{,}912 + b.e^{(x.k)}$$
$$\boldsymbol{b = -8{,}61}$$

$$16{,}34 = 23{,}912 - 8{,}61.e^{(1.k)}$$
$$16{,}34 - 23{,}912 = -8{,}61.e^{k}$$
$$-7{,}57 = -8{,}61.e^{k}$$
$$-7{,}57/-8{,}61 = e^{k}$$
$$0{,}87 = e^{k}$$
$$log.0{,}87 = log.e^{k}$$
$$-0{,}06 = k.log.e$$
$$-0{,}06/0{,}43 = k$$
$$\boldsymbol{k=-0{,}13}$$

Fonte: os autores.

Agora, com os valores das incógnitas a e k, foi realizada a organização dos dados para manter o modelo F em função de da variável x.

$$F(x) = 23{,}912 - 8{,}61.e^{(-0{,}13*x)}$$

Como o objetivo era encontrar um modelo que possa ser usada a variável x em relação ao ano em que se deseja investigar a perda de água, foi feita a adequação do modelo que está relacionado à variável auxiliar, de modo a obter:

$$F(x) = 23{,}912 - 8{,}61.e^{(-0{,}13*x)}$$
Sendo $x = a - 2010$
onde $a = ano$
temos que:
$$F(\text{a}) = 23{,}912 - 8{,}61.e^{[(-0{,}13.(a-2010)]}$$
$$F(\text{a}) = 23{,}912 - 8{,}61.e^{(-0{,}13a+261{,}3)}$$

E por fim, foi feita a validação desses anos com o do modelo assintótico encontrado pelos autores, no qual foi possível observar que havia coerência e relevância, resultando esta validação na tabela 4. Apesar de uma variação entre os dados reais, consideramos essas funções como válida, pois a taxa de variação entre os valores é cabível dentro da problemática estudada. Enfatizamos que os modelos matemáticos estudados apresentam indicações possíveis para a situação-problema, e outros estudos podem colaborar com a dedução de outros modelos matemáticos.

Tabela 4 – Validando o modelo $F(a) = 23{,}192 - 8{,}61e^{(-0{,}13.a+261{,}3)}$

Tempo	Variável auxiliar	Média anual de perdas de água	Média em mil m^3	Utilizando o modelo $F(a) = 23{,}192 - 8{,}61e^{(-0{,}13.a+261{,}3)}$
2010	0	15297,0474	15,30	15,30
2011	1	16339,24873	16,34	15,62
2012	2	19962,37477	19,96	17,27
2013	3	24396,12128	24,40	18,14
2014	4	23106,93438	23,11	18,79
2015	5	24839,1574	24,84	19,41
2016	6	24908,88119	24,91	19,96

Fonte: Elaborada pelos autores.

A partir do modelo matemático obtido, é feita a aplicação para os anos futuros, de modo com que possamos verificar a possível perda do volume de água nos próximos anos (Tabela 5).

Tabela 5– Previsão de perda segundo o modelo

Tempo	Volume da perda de água modelado
2017	20,44
2018	20,86
2019	21,23
2020	21,56
2021	21,85
2022	22,1

Fonte: Elaborada pelos autores.

Em detrimento dos dados encontrados por meio da validação, nos preocupamos em encontrar o ano em que a quantidade de perda de água por vazamento será próxima aos 40% da média de quantidade de água distribuída, considerando que a média da distribuição anual: 23,912m³ seria sempre a mesma. Adotamos um valor pouco próximo ao da assíntota: 23,89m³. E substituímos no modelo algébrico encontrado.

$$f(a) - 23{,}912 - 8{,}61.\, e^{-0.13a+261{,}3}$$
$$23{,}89 = 23{,}912 - 8{,}61.\, e^{-,13a+261{,}3}$$
$$-0{,}02 = 8{,}61.\, e^{-0{,}13+261{,}3}$$
$$-\frac{0{,}02}{-8{,}61} = e^{-0{,}13a+261{,}3}$$
$$0{,}0025 = e^{-0{,}13a+261{,}3}$$

$$-2{,}6 = (-0{,}13a + 261{,}3)\ln e$$
$$-\frac{2{,}6}{0{,}43} = -0{,}13a + 261{,}3$$
$$-6{,}0465 = -0{,}13a + 261{,}3$$
$$-267{,}34 = -0{,}13a$$

$$ln\,0{,}0025 = ln\,e^{-0{,}13a+261{,}3}$$

$$\frac{267{,}34}{0{,}13} = a$$
$$\mathbf{2056{,}46 = a}$$

O tempo encontrado aproximadamente foi o ano de 2056, ou seja, se as hipóteses formuladas para o modelo permanecer, o volume da perda de água na cidade de Uraí chegará no seu limite máximo. Afim de encontrar investigar a taxa de variação de perda de água, em determinado instante, derivamos o modelo matemático obtido,$f(x) = 23,912 - 8,61.e^{-0,13x+261,3}$ utilizando a regra do produto de funções para derivadasobtivemos $f'(x) = 1{,}1193.\mathrm{e}^{-0{,}13x+261{,}3}$. Consideramos que quando f'(x) é igualada a zero, encontramos o ponto crítico da função, ou seja, $x = 2010$. Neste contexto, em 2010 é onde ocorre a perda mínima de água dentro do período analisado.

Considerações Finais e Reflexões para a Formação Inicial

Por meio do uso da modelagem matemática em sala de aula, podemos concluir do presente trabalho que a perda de água é um fator preocupante a todos, com isso, foi elaborado um modelo que acreditamos ser cabível a situação-problema, havendo sucesso ao mostrar que quantidade de perda que temos em uma determinada cidade pode ser prevista. E com o modelo proposto pode-se deduzir o quanto de perda terá na cidade de Uraí ao longo dos anos. Não há como solucionar o problema de perdas, pois estamos longe disso, mas sim da tentativa de expor a realidade presente nessa cidade. Com tudo podemos afirmar que este projeto pode contribuir para a conscientização dessa problemática. E para que isso fosse possível, foi feita a utilização da modelagem matemática, a fim de trazer ao meio matemático uma realidade do cotidiano, e que está se torne um caminho para novas discussões e até mesmo a resolução do problema hídrico da perda de água de outras cidades.

A situação-problema estudada por meio da modelagem matemática possibilitou que os alunos percorressem as fases da modelagem matemática de acordo com Almeida, Silva e Vertuan (2012), como a inteiração com o tema da perca de água na cidade de Uraí, a matematização da situação, por meio do tratamento dos dados, do levantamento de hipóteses e da identificação de variáveis, a resolução com a obtenção e análise de dois modelos matemáticos, um exponencial e um exponencial assintótico, sendo o segundo o mais adequado para representar a perda de água na cidade contendo um limitante, e a interpretação e análise dos modelos de acordo com a situação inicial declarada.

Quanto ao uso da modelagem matemática na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, uma prática diferente das demais disciplinas, possibilitou a inteiração com temas do nosso cotidiano e nos auxiliou na vivência de uma abordagem pedagógica que pode fazer parte de nossa futura prática docente, bem como servir de exemplo para alunos e professores que queiram trabalhar com essas atividades em sala de aula.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica.** São Paulo: Contexto, 2012.

BRASIL. Associação Brasileira de Engenharia Sanitária e Ambiental - ABES. **Perdas em sistemas de abastecimento de água**: diagnóstico, potencial de ganhos com sua redução e propostas de medidas para o efetivo combate. Disponível em:<www.abes-sp.org.br/arquivos/perdas.pdf>. Acesso em: 03 jul. 2017.

BRASIL. Instituto Brasileiro de Geografia e estatística- IBGE. **Pesquisa Anual de Serviço-**PAS. Disponível em:<http://cidades.ibge.gov.br/xtras/perfil.php?codmun=412840>. Acesso em:04 de Jul. 2017.

OLIVEIRA, L. **Modelagem Matemática no tratamento e distribuições de água**: propostas para o ensino de matemática. 2013. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria-RS, 2013.

PARANÁ. **Prefeitura Municipal de Uraí**: portal oficial online. Disponível em:<http://urai.pr.gov.br>. Acesso em: 04 jul. 2017.

SANEPAR. **Companhia de Saneamento do Paraná**. Disponível em:<http://site.sanepar.com.br>. Acesso em: 04 jul. 2017.