



18,19 e 20 de outubro de 2018

MODELAGEM E A SALA DE AULA



Encontro Paranaense de Modelagem
na Educação Matemática

A VIDEOANÁLISE EM FLUIDOS: ANTECIPAÇÃO PARA UMA ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Rodrigo Tavares da Silva
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – *Câmpus Londrina*
rodrigotsilva@utfpr.edu.br

Adriana Helena Borssoi
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – *Câmpus Londrina*
adrianaborssoi@utfpr.edu.br

Caio Barreto de Oliveira Reis
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – *Câmpus Londrina*
caioobarretoreis@gmail.com

RESUMO

Neste trabalho apresentamos uma proposta de atividade, a qual tem por finalidade a exploração quanto o comportamento de um corpo rígido em diferentes fluidos, no caso água e detergente neutro. Trata-se de uma atividade de Modelagem Matemática associada ao uso videoanálise com o *software Tracker*, para a qual parte dos dados são obtidos pela gravação de um experimento de queda livre de um corpo rígido nos diferentes fluidos. O intuito foi estudar o comportamento de queda e o trabalho desenvolvido pela força associada ao corpo em cada fluido. O intuito da antecipação para a realização de uma atividade de Modelagem é a exploração da situação-problema disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, no estudo de integral definida, visto que a matematização da situação permite discutir conceitos do princípio fundamental da dinâmica de Newton, atribuído às disciplinas de Física e Mecânica dos Fluidos.

Palavras-chave: Modelagem Matemática; Vídeoanálise; Cálculo Diferencial e Integral

INTRODUÇÃO

O presente artigo retrata o interesse dos autores, iniciantes no fazer Modelagem Matemática, um enquanto aluno de iniciação científica, outro enquanto pesquisador em formação em um Mestrado Profissional na área de Ensino de Matemática.

O intuito do trabalho é apresentar a elaboração e o planejamento de uma proposta de atividade com potencial a ser implementada para o ensino de integrais definidas, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, explorando conceitos com a Física e a Mecânica dos Fluidos.

A Mecânica dos Fluidos é uma disciplina presente em cursos de engenharia. Para uma melhor compreensão, apontamos uma definição de fluido, conforme Çengel e Cimbala

(2015): “[...] uma substância existe nos três estados ou fases fundamentais: sólido, líquido e gasoso.”(p. 2), porém, apenas “[...] uma substância no estado líquido ou gasoso é denominada fluido.” (p. 2).

Já as disciplinas de Física e Cálculo Diferencial e Integral I, usualmente estão inseridas nos cursos das áreas de exatas e engenharias, as quais fazem parte do grupo de disciplinas de núcleo comum. Tais disciplinas oferecem conceitos que serão necessários para as demais disciplinas dos cursos superiores.

O ensino de Cálculo é um grande desafio para professores e pesquisadores no âmbito da Educação Matemática, que buscam amenizar os índices de evasão e reprovação (TREVISAN, MENDES, 2015; SILVA, 2017; SILVA, BORSSOI, 2017). Trevisan e Mendes (2015) apontam que ainda é usual que as aulas sejam mediadas por modelos tradicionais, em que os alunos seguem as orientações do professor e reproduzem o que lhes foi “ensinado”.

Palha (2013) sugere a necessidade de buscar estratégias para contribuir com a aprendizagem dos alunos, de forma a amenizar a lacuna existente entre a prática de sala de aula e a compreensão dos mesmos. Nesse viés, Trevisan e Mendes (2015) destacam a necessidade de organizar o ambiente educacional, alinhado com a organização didático-pedagógica proposta pela instituição.

Silva (2017) aponta que algumas instituições têm procurado por alternativas que possam amenizar as defasagens nos processos de ensino e aprendizagem dos alunos. Uma possibilidade que tem sido implementada em sala de aula, segundo Horn e Staker (2015), é o uso de tecnologias digitais que têm facilitado a comunicação e ainda a realização de estudos.

Organizar o ambiente educacional com diferentes alternativas pedagógicas, como uso de Tecnologias Digitais, Modelagem Matemática, Investigação Matemática, entre outras, e mesmo associações dessas alternativas é algo que se tem experimentado com o intuito de contribuir para amenizar defasagens de ensino (SANTOS; BISOGNIN, 2007, MALHEIROS;FRANCHI, 2013; GREEFRATH, 2011).

Um encaminhamento, por exemplo, foi feito por Stillman, Brown e Geiger (2015), os quais apresentam uma discussão acerca da formulação e especificação de uma proposta de atividade de Modelagem Matemática, considerando sanar possíveis problemas que pudessem aparecer na realização da mesma, sendo por isso feito antecipadamente todo o planejamento.

Dessa forma, apresentamos neste artigo o planejamento de uma proposta de atividade de Modelagem Matemática, por meio da videoanálise, a qual explora o comportamento de um corpo material em diferentes fluidos, analisando sua velocidade e o trabalho realizado.

Com esse intuito, na próxima seção trazemos alguns apontamentos teóricos sobre a Modelagem Matemática, apresentamos o entendimento por alguns pesquisadores, sobre a antecipação de uma atividade de Modelagem. Em seguida, mencionamos o uso da videoanálise por meio do *Tracker*. Na seção seguinte, discutimos a previsão da atividade por meio da modelagem realizada, apresentando um planejamento a ser explorado na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. E por fim, algumas considerações e apontamentos de futuros trabalhos.

MODELAGEM MATEMÁTICA

A Modelagem foi inserida no Brasil, em meados da década de 1970, como uma forma de mudança no formato que a Matemática era ensinada, tal iniciativa foi tomada pelos professores (BASSANEZI, 2014). Atualmente, tem promovido discussões por pesquisadores no âmbito da Educação Matemática (BIEMBENGUT e HEIN, 2003; BASSANEZI, 2014; BARBOSA e SANTOS, 2007; ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2012) os quais têm contribuído com a comunidade da área, em eventos e publicações de alcance nacional e internacional, promovendo discussões acerca das perspectivas e projeções da Modelagem para a Educação Matemática.

Consideramos que,

[...] a modelagem matemática tem sido apontada por diversos educadores matemáticos como uma alternativa pedagógica que visa relacionar Matemática escolar com questões extra-matemáticas de interesse dos alunos, configurando uma atividade que se desenvolve segundo um esquema - um ciclo de modelagem – na qual a escolha do problema a ser investigado tem a participação direta dos sujeitos envolvidos (ALMEIDA; BRITO, 2005, p. 5).

Entendemos que há diferentes definições para a Modelagem Matemática, como, por exemplo, Bassanezi (2014); Barbosa e Santos (2007); Biembengut e Hein (2003); Almeida, Silva e Vertuan (2012), entre outros. Esses autores têm sido referências para o planejamento e

desenvolvimento de atividades, bem como, para os encaminhamentos dados para o desenvolvimento de atividades de Modelagem.

Para Biembengut e Hein (2003),

A ideia de modelagem suscita a imagem de um escultor trabalhando com argila, produzindo um objeto. Esse objeto é um modelo. O escultor munido de material – argila, técnica, intuição e criatividade – faz seu modelo, que na certa representa alguma coisa, seja real ou imaginária. (p. 11)

Tal apontamento dos autores, mesmo sendo em um contexto não relacionado à sala de aula, destaca a importância de fazer uso dos recursos disponíveis, juntamente com técnica e ainda intuição, que podem contribuir para obter um modelo final.

Já Borssoi e Almeida (2004), destacam sobre o uso da Modelagem, assim como suas potencialidades perante o envolvimento do aluno na atividade. As autoras, assim como Almeida e Brito (2005), destacam a importância do envolvimento dos alunos na atividade cuja temática esteja de alguma forma inserida na realidade desses alunos.

O uso de situação-problema para Borssoi e Almeida (2004), bem como, Almeida, Silva e Vertuan (2012), é o ponto de partida para uma atividade de Modelagem Matemática. O desenvolvimento de tal atividade se caracteriza por um conjunto de procedimentos de acordo com as seguintes fases: inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação, que serão discutidos a seguir.

Para esses autores, a inteiração seria o contato inicial com a situação-problema, no intuito de estabelecer características e um apanhado de informações, que possam contribuir para a definição do problema, bem como de metas para sua resolução. Assim, a matematização seria a formalização das hipóteses, que foram definidas na primeira fase. Já a resolução, consiste na construção do modelo matemático, no intuito que responda o problema proposto inicialmente. E por fim, a interpretação de resultados e validação, que objetiva realizar uma análise da resposta dada, se a mesma está adequada ao problema inicial.

No contexto de sala de aula, para Borssoi e Almeida (2004) a modelagem pode ser percebida de diferentes maneiras, visto que, conceitos matemáticos já conhecidos podem ser utilizados, assim como, pode dar oportunidade de introduzir novos conceitos na realização da atividade. Santos e Bisognin (2007) argumentam que o uso com maior frequência da

Modelagem nas aulas pode promover interesse dos alunos, assim como, a vontade de aprender, pois oportuniza o elo entre ensino e aprendizagem.

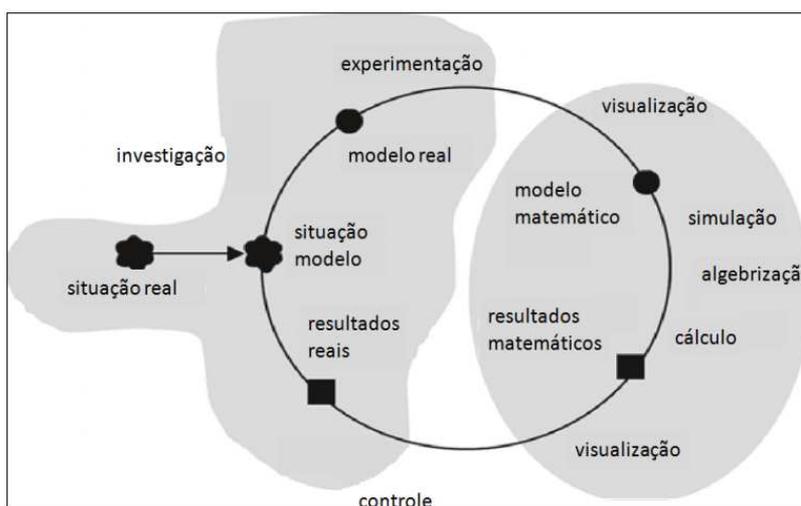
O uso da Modelagem tem sido mediada pela tecnologia, por oportunizar que explorações e simulações sejam feitas com maior facilidade. Diante disso, mencionamos Malheiros e Franchi (2013), que destacam que o uso de tecnologias proporciona um ambiente de investigação e, assim, o professor se configura como um orientador.

Borssoi (2013) e Borssoi e Almeida (2015) consideram que a disponibilidade de recursos tecnológicos pode facilitar a aprendizagem significativa, pois desperta o interesse e curiosidade para a aprendizagem por parte dos envolvidos.

Para Blum (2015) o uso de aplicações e da modelagem é importante, contudo esforços são necessários para que sejam acessíveis aos alunos. Ao mencionar sobre os aspectos que considera pertinente para uma metodologia de ensino que envolva aplicação e modelagem, aponta que o uso de computadores pode proporcionar experimentação, investigação, simulação, visualização ou cálculos.

Assim como, Greefrath (2011), Blum (2015) sugere estender o ciclo de modelagem aliando ao mundo tecnológico, que além de obter um modelo matemático, tem a possibilidade de verificar um modelo computacional e ainda seus resultados, que podem ser validados para a situação inicial, conforme ilustra a Figura 01

Figura 01 – Ciclo de Modelagem com influência de ferramentas digitais segundo Blum e Leiß



Fonte: Greefrath et. al. (2011, p. 303)

Stillman, Brown e Geiger (2015) consideram que, em determinadas situações, é pertinente planejar uma atividade de Modelagem Matemática e chamam a isso *antecipação*. Para os autores,

No contexto da modelagem matemática nós definimos antecipação como a previsão do que será útil matematicamente subsequentemente em transições entre fases do processo de modelagem. Essa antecipação envolve prenúncios e retroalimentações entre fases, informando decisões a tomar. (STILLMAN, BROWN e GEIGER, 2015, p. 95)

Para Niss (2010) delimitar o que será útil para a matematização contribui para a tomada de decisões e permite prever quais encaminhamentos tomar, assim ao elaborar um modelo teórico é interessante verificar o que está apropriado, por meio da antecipação. O autor utiliza o termo “antecipação implementada” (NISS, 2010, p. 55), em que o uso da palavra implementada estaria remetendo ao que foi adequado e verificado na matematização.

Stillman, Brown e Geiger (2015) destacam que é necessário idealizar a situação real a ser explorada e, a partir dela decidir o que é essencial e importante para a realização da matematização. Já na matematização, o modelador precisa antecipar representações matemáticas e, o que representam tais soluções, imaginando quais questionamentos poderiam ser feitos para essas soluções, sendo possível fornecer respostas imediatas para possíveis questionamentos.

Nesse viés é que relatamos na sequência uma experiência por meio da videoanálise para o desenvolvimento e planejamento de uma atividade de Modelagem Matemática.

A VIDEOANÁLISE PARA A MODELAGEM DE DIFERENTES FLUIDOS

Os vídeos têm sido utilizados para promover as relações entre as pessoas, seja por motivos de trabalho, bem como, para finalidades pedagógicas. Ferrés (2001) e Gomes (2009) apontam que seu uso é um meio de comunicação e ensino. O primeiro remete à análise da linguagem, enquanto o segundo explora recursos da sua linguagem para fins didáticos.

Nesse viés, a realização da análise de vídeo, ou ainda, a videoanálise é considerada uma tecnologia (BRYAN, 2010; BROWN, COX, 2009) que tem apresentado grande

potencial para o processo de ensino e de aprendizagem, por ser possível a produção de vídeos e sua exploração (BEZERRA Jr et al., 2012). Esse recurso é objeto de diversas pesquisas, principalmente relacionadas ao Ensino de Física e tem ganhado espaço também na área de Educação Matemática.

Uma vantagem que pode ser mencionada quanto ao uso da análise de vídeos, é que sua produção pode ser feita pelos participantes, ou mesmo selecionar um material que seja de interesse dos envolvidos e, em seguida, ser realizada a exploração e estudo da mesma por meio do *Tracker*¹, que é um *software* gratuito, o qual está inserido nas pesquisas, como, por exemplo, de Bezerra Jr et al. (2012), Borssoi (2013) e Piffer e Borssoi (2016).

Borssoi (2013) fez uso da vídeoanálise em sua pesquisa, verificando possíveis contribuições para a aprendizagem no desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática. Para a autora,

Dentre os atributos da vídeoanálise com o *Tracker* estão: conexão entre experiências escolares e experiências cotidianas; múltiplas representações dos fenômenos em uma mesma tela: vídeo, tabela de dados, gráficos, equações; manipulação dos referenciais e compreensão da influência das escalas na interpretação de fenômenos físicos; análise de mais de um objeto no mesmo sistema, simultaneamente; e, realização de experimentos com baixo custo. Estes elementos auxiliam na compreensão de conceitos matemáticos e não-matemáticos (BORSSOI, 2013, p. 83).

Tais considerações mencionadas pela autora foram observadas em sua pesquisa pelos resultados obtidos. Porém, foram necessários alguns cuidados para que os vídeos produzidos facilitassem o momento da análise no *Tracker*.

Alguns critérios para a produção de vídeos, de forma a obter a melhor captura do cenário são necessários: definir previamente os objetos; escolher um ambiente sem excesso ou falta de iluminação; estabelecer medidas de referência, para que sejam definidas as escalas posteriormente; posicionar a câmera, sem movimentá-la e não utilizar o *zoom* digital, para não influenciar nas escalas (BORSSOI, 2013).

Consideramos tais apontamentos pertinentes para a realização desse experimento, assim como, para a realização da análise de nossos dados. Tais menções

¹Download em: <http://physlets.org/tracker/>

realizadas contribuíram para que pudéssemos planejar os encaminhamentos a serem realizados para a análise do vídeo em questão, conforme apresentaremos na próxima seção.

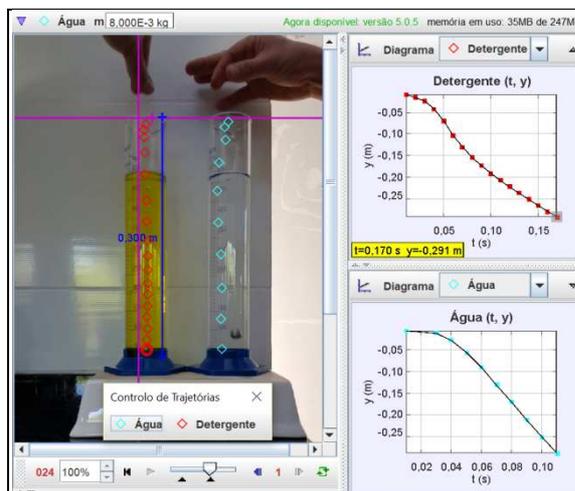
Na sequência é apresentado a Modelagem Matemática realizada, por meio da videoanálise.

A MODELAGEM REALIZADA

A atividade foi idealizada pelos autores visando a antecipação, no sentido de Niss (2010) e Stillman, Brown e Geiger (2015), com o intuito estudar o trabalho² realizado no deslocamento de um corpo rígido em diferentes fluidos: água e detergente.

Neste experimento foram utilizadas duas esferas de aço com características idênticas, as quais foram soltas simultaneamente em duas pipetas com 500 ml, uma com água e outra com detergente. Esse experimento foi registrado por vídeo, a partir do qual foi analisado o movimento que o corpo rígido desenvolveu em cada fluido. A coleta de parte dos dados foi realizada por intermédio do *Tracker*, visto que este *software* permite verificar a distância percorrida pelas esferas, quando soltas, até o instante que cada qual atingiu o fundo da vidraria, conforme Figura 2.

Figura 02 – Estudo do corpo rígido em diferentes fluidos: água e detergente



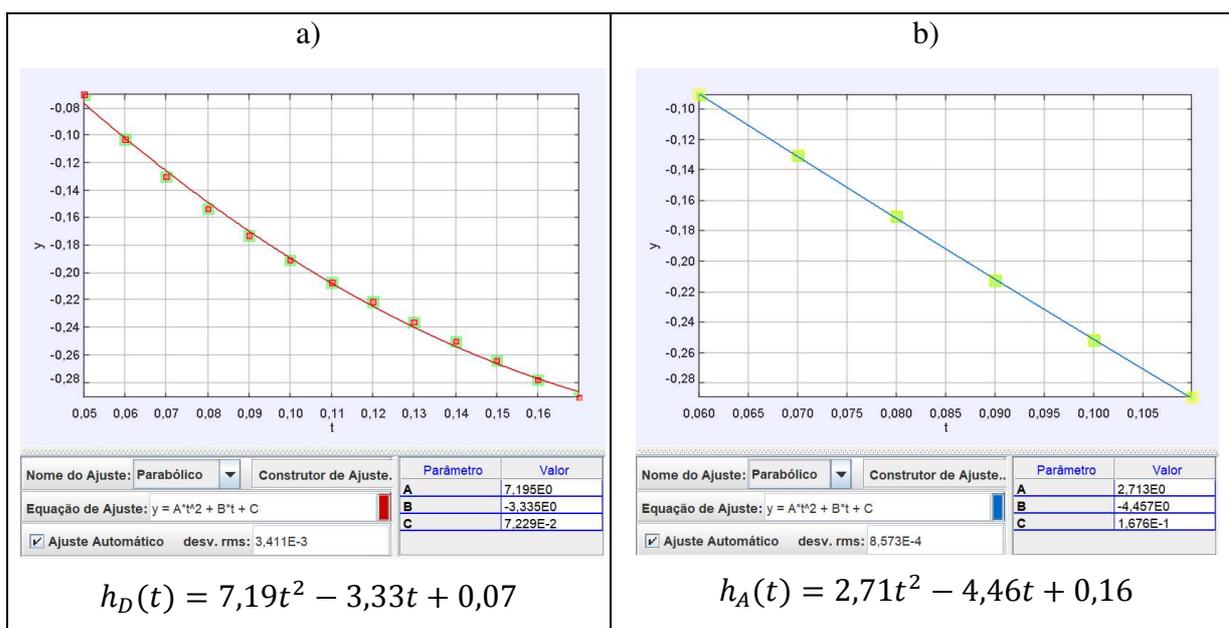
Fonte: Dos autores

²Em Física, trabalho é uma medida da energia transferida pela aplicação de uma força ao longo de um deslocamento.

Os dados registrados pelo *software* respeitam a uma medida de referência do cenário, indicada pelo segmento em azul, que corresponde a altura da pipeta (30 cm). A videoanálise se dá por meio de ferramentas que conseguem analisar minuciosamente cada instante do vídeo e possibilitam obter representações gráficas e tabulares, bem como equações de ajuste.

Por meio do vídeo correspondente a Figura 2, foram estabelecidas as variáveis a serem analisadas. Nesta situação, avaliamos a posição do corpo rígido em cada fluido, considerando o tempo (t) que ele leva para atingir o fundo do recipiente. A Figura 3 nos fornece o gráfico e a equação para a posição de cada esfera em função tempo sendo que a imagens a) e b) correspondem ao fluido detergente ($y = h_D(t)$) e ao fluido água ($y = h_A(t)$). Cabe observar que foram desconsiderados os pontos registrados na Figura 2 que correspondem a posição de cada esfera enquanto o fluido era o ar.

Figura 03 – Gráfico da posição em função do tempo da esfera no detergente e na água



Fonte: Dos autores

Foram escolhidos modelos quadráticos por apresentarem bem cada curva de tendência. A partir de dados obtidos com a videoanálise e outros obtidos da literatura ou do site do produto, como é o caso da viscosidade do detergente (Tabela 1), realizamos a matematização.

Tabela 1 – dados da situação em estudo

Fluido	Densidade (kg/m ³)	Viscosidade 25°C(kg/m. s)	Tempo inicial (s)	Tempo final (s)	Raio esferas (m)	Massa esferas (Kg)
Água	1000	0,001	0,05	0,110	0,05	0,008
Detergente	1032	0,250*	0,05	0,170	0,05	0,008

* http://www.copapel.com.br/copapel/ficha-tecnica/9009/FISPQ_LAVA-LOUCAS_NEUTRO.PDF

Fonte: Dos autores

Na fase de inteiração, observando o experimento, foi possível perceber que não seria realista desconsiderar as forças de empuxo e de arrasto, assim, considerando o peso (P), força de empuxo (E), força de arrasto (Fa) e a força resultante (Fr), a qual é equivalente ao produto da massa (m) pela aceleração do corpo (a), assumindo as hipóteses do princípio fundamental da Dinâmica de Newton (FOX; PRITCHARD; MCDONALD, 2011).

$$P - E - Fa = Fr \quad \rightarrow \quad P - E - Fa = ma$$

Considerando que a aceleração é a derivada da velocidade em função do tempo, essa equação pode ser reescrita, substituindo a força peso (P) pelo produto da massa pela gravidade (g), e a força empuxo (E), é equivalente ao produto da massa do fluido deslocado (mfd) pela gravidade (g). Como a força de arrasto (Fa) de uma esfera é equivalente ao produto de 6π pela viscosidade do fluido (μ) e pela velocidade que se move através do fluido (v) e pelo raio da esfera (r)

$$P - E - Fa = m \frac{dv}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = \frac{P-E-Fa}{m} \quad \rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = \frac{mg - mfdg - 6\pi\mu.v.r}{m}$$

A massa do fluido deslocado (mfd) é equivalente ao produto da densidade do fluido (ρ) pelo volume do fluido deslocado (vfd), que neste caso, é o volume da esfera quando estiver totalmente submersa. Assim, o volume do fluido deslocado (vfd) também será o volume da esfera de raio r, $vfd = \frac{4.\pi.r^3}{3}$.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{m.g - \rho.vfd.g - 6\pi.\mu.v.r}{m} \quad \rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = g - \frac{\rho.4.\pi.r^3.g}{3.m} - \frac{6.\pi.\mu.v.r}{m}$$

Resolvendo essa última equação diferencial ordinária, do tipo linear, que isolando a variável velocidade (v), obtemos:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{6 \cdot \pi \cdot \mu \cdot v \cdot r}{m} = g - \frac{\rho \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^3 \cdot g}{3 \cdot m}$$

Igualando a zero o segundo termo da igualdade e calculando a antiderivação, após isolar as variáveis:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{6 \cdot \pi \cdot \mu \cdot v \cdot r}{m} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -\frac{6 \cdot \pi \cdot \mu \cdot r}{m} dt \quad \rightarrow \quad \int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = -\int_{t_0}^t \frac{6 \cdot \pi \cdot \mu \cdot r}{m} dt$$

Os resultados obtidos, aplicando propriedades logarítmicas, obtemos uma equação para a velocidade inicial:

$$\ln |v| - \ln |v_0| = -\frac{6 \cdot \pi \cdot \mu \cdot r}{m} \cdot (t - t_0) \quad \rightarrow \quad v_0 = v \cdot e^{\frac{6 \cdot \pi \cdot \mu \cdot r}{m} \cdot (t - t_0)}$$

Como v_0 é uma constante, sua derivada será igual a zero, então calculamos a derivada do segundo membro da igualdade desta última equação, temos

$$\frac{d}{dt} \left(v \cdot e^{\frac{6 \cdot \pi \cdot \mu \cdot r}{m} \cdot (t - t_0)} \right) = \frac{dv}{dt} \cdot e^{\frac{6 \cdot \pi \cdot \mu \cdot r}{m} \cdot (t - t_0)} + v \cdot \frac{6 \cdot \pi \cdot \mu \cdot r}{m} \cdot e^{\frac{6 \cdot \pi \cdot \mu \cdot r}{m} \cdot (t - t_0)}$$

Colocando $e^{\frac{6 \cdot \pi \cdot \mu \cdot r}{m} \cdot (t - t_0)}$ em evidência, obtemos a seguinte expressão:

$$\left(\frac{dv}{dt} + \frac{6 \cdot \pi \cdot \mu \cdot r}{m} v \right) \cdot e^{\frac{6 \cdot \pi \cdot \mu \cdot r}{m} \cdot (t - t_0)} = 0$$

Retomando a expressão $\frac{dv}{dt} + \frac{6 \cdot \pi \cdot \mu \cdot v \cdot r}{m} = g - \frac{\rho \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^3 \cdot g}{3 \cdot m}$ e considerando que o termo $g - \frac{\rho \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^3 \cdot g}{3 \cdot m}$ é diferente de zero, multiplicando-a por $e^{\frac{6 \cdot \pi \cdot \mu \cdot r}{m} \cdot (t - t_0)}$ e, calculando a integração em ambos os lados, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(v \cdot e^{\frac{6 \cdot \pi \cdot \mu \cdot r}{m} \cdot (t - t_0)} \right) &= \left(g - \frac{\rho \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^3 \cdot g}{3 \cdot m} \right) \cdot e^{\frac{6 \cdot \pi \cdot \mu \cdot r}{m} \cdot (t - t_0)} \\ \int_{t_0}^t \frac{d}{dt} \left(v \cdot e^{\frac{6 \cdot \pi \cdot \mu \cdot r}{m} \cdot (t - t_0)} \right) &= \int_{t_0}^t \left(g - \frac{\rho \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^3 \cdot g}{3 \cdot m} \right) \cdot e^{\frac{6 \cdot \pi \cdot \mu \cdot r}{m} \cdot (t - t_0)} dt \end{aligned}$$

Para encontrar a velocidade utilizamos os dados da Tabela 1 na expressão obtida da integral acima:

$$v = \frac{1}{e^{\frac{6 \cdot \pi \cdot \mu \cdot r}{m}}} \cdot \left[\left(\frac{g}{e^{\frac{6 \cdot \pi \cdot \mu \cdot r}{m} \cdot t_0}} \cdot \frac{e^{\frac{6 \cdot \pi \cdot \mu \cdot r}{m}} - e^{\frac{6 \cdot \pi \cdot \mu \cdot r}{m} \cdot t_0}}{\frac{6 \cdot \pi \cdot \mu \cdot r}{m}} \right) - \left(\frac{\rho \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^3 \cdot g}{3 \cdot m} \cdot \frac{1}{e^{\frac{6 \cdot \pi \cdot \mu \cdot r}{m} \cdot t_0}} \cdot \frac{e^{\frac{6 \cdot \pi \cdot \mu \cdot r}{m} \cdot t} - e^{\frac{6 \cdot \pi \cdot \mu \cdot r}{m} \cdot t_0}}{\frac{6 \cdot \pi \cdot \mu \cdot r}{m}} \right) \right]$$

Encontramos como velocidade na água, $v_a = 5,494 \text{ m/s}$, e no detergente, $v_d = 0,926 \text{ m/s}$.

Com esses dados, obtidos para a velocidade em cada fluido, estudamos o trabalho (W), o qual é influenciado pela força peso (P), força de empuxo (E) e a força de arrasto (Fa), por meio da integral:

$$W = \int_0^h (P - E - Fa) dh \quad \rightarrow \quad W = mgh - \rho \frac{4\pi r^3}{3} gh - 6\mu vrh$$

Essa expressão foi obtida pelas considerações feitas para as forças (P, E e Fa) no cálculo da velocidade. Assim, obtemos o valor para o trabalho, para a água, $W_a = 0,021 J$, para o detergente, encontramos, $W_d = 0,014 J$.

Embora possamos perceber que a densidade calculada para os fluidos não é muito diferente, observamos que a velocidade de queda das esferas teve diferença significativa. No entanto, temos que levar em conta que a viscosidade do detergente é bem superior a água, o que pode justificar o fato.

CONSIDERAÇÕES E ENCAMINHAMENTOS FUTUROS.

Para o ambiente escolar, consideramos a importância da participação dos alunos envolvidos em atividades de Modelagem Matemática. O uso da videoanálise pode enriquecer a experiência com a Modelagem, além de permitir a obtenção de dados reais para a matematização e exploração de conceitos já teorizados, como os que aludimos neste texto, relativos ao princípio fundamental da dinâmica de Newton.

Assim como Littig e Novais (2016), acreditamos que o professor, quando faz uso da tecnologia em suas aulas, deva ter traçado os objetivos e todo o planejamento para que consiga orientar os alunos e contribuir com o encaminhamento da atividade desenvolvida.

Nesse sentido é que a realização do experimento relatado nesse texto, associado à antecipação como recomendado por Stillman, Brown e Geiger (2015) e Niss (2010), se mostrou fundamental para a compreensão e planejamento da atividade de Modelagem, visando a implementação em sala de aula.

Ao escolhermos estudar a velocidade e o trabalho realizado em diferentes fluidos, consideramos a oportunidade de aproximar temas de diferentes disciplinas dos cursos da engenharia, neste caso, Mecânica dos Fluidos e suas propriedades, que estão relacionadas com a disciplina de Física, explorando tais conceitos, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.

Nesse trabalho não exploramos uma abordagem de sala de aula, todavia a experiência nos proporcionou questionamentos e reflexões de como a situação-problema mediada por recursos digitais tem potencial para ser explorada em sala de aula e despertou o interesse em planejar diferentes abordagens para o tema. Uma possibilidade é o desenvolvimento a atividade de Modelagem desde a realização do experimento, produção do vídeo e realização da videoanálise pelos alunos; outra possibilidade é a disponibilização de um recurso digital com o vídeo do experimento e orientações para a realização da videoanálise, de modo que parte das informações de algumas fases do ciclo de Modelagem sejam, de certa forma, influenciadas pelo proponente.

Um recurso digital que contemple essa última abordagem está em fase de elaboração e visa ser implementada em aulas de Cálculo Diferencial e Integral I, para os cursos de engenharia, promovendo conhecimentos básicos da disciplina de Mecânica de Flúidos.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W.; BRITO, D. S. Atividades de Modelagem Matemática: que sentido os alunos podem lhe atribuir?. *Ciência e Educação* (UNESP. Impresso), v. 11, p. 1-16, 2005.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. 1. Ed. São Paulo: Contexto, 2012.

BARBOSA, J. C; SANTOS, M. A. **Modelagem matemática, perspectivas e discussões**. *Encontro Nacional de Educação Matemática 9* (2007): p. 1-12.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. 4. ed. São Paulo: Contexto, 2014.

BEZERRA JR, A.G. et al. Videoanálise com o software livre Tracker no laboratório didático de Física: movimento parabólico e segunda lei de Newton. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 29, p. 469-490, 2012.

BIEMBENGUT, M. S; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2003.

BORSSOI, A. H. **Modelagem matemática, aprendizagem significativa e tecnologias: articulações em diferentes contextos educacionais**. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

BORSSOI, A. H.; ALMEIDA, L. M. W. MODELAGEM MATEMÁTICA E APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA: UMA PROPOSTA PARA O ESTUDO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS. *Educação Matemática Pesquisa* (Impresso), PUC/SP, v. 6, n.2, p. 91-121, 2004

BORSSOI, A. H.; ALMEIDA, L. M. W. Percepções sobre o uso da Tecnologia para a Aprendizagem Significativa de alunos envolvidos com Atividades de Modelagem Matemática. *REVISTA ELECTRÓNICA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN EN CIENCIAS (EN LÍNEA)*, v. 10, p. 36-45, 2015.

BLUM, Werner. Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know, What Can We Do?. In: **The proceedings of the 12th international congress on mathematical education**. Springer, Cham, 2015. p. 73-96.

BROWN, D; COX, A. J. **Innovative uses of video analysis**. In: *The Physics Teacher*, v. 47, n 3, p. 145-150, 2009.

BRYAN, J. A. Investigating the conservation of mechanical energy using video analysis: four cases. **PhysicsEducation**, v. 45, n. 1, p. 50-57, 2010.

FERRÉS, J. **Pedagogia dos meios audiovisuais e pedagogia com os meios audiovisuais**. In: SANCHO J. María (Org.). *Para uma Tecnologia Educacional*. Trad. Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: Artes Médicas, 2001. p. 127-155

FOX, R.W.; PRITCHARD, P. J.; MCDONALD, A. T. **Introdução a mecânica dos fluidos**. 7ª edição. Rio de Janeiro. LTC. 2011

GREEFRATH, G. Using Technologies: New possibilities of teaching and learning modelling – Overview. In: G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, G. Stillman (EDS), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling, ICTMA 14* (P. 301 – 304), Dordrecht: Springer, 2011.

GOMES, L. F. Vídeos didáticos: uma proposta de critérios para análise. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, v. 89, n. 223, 2009. Disponível em: <http://rbep.inep.gov.br/index.php/rbep/article/view/688/666>

HORN; STAKER, M. B; H. **Blended: usando a inovação disruptiva para aprimorar a educação**. Porto Alegre: Penso, 2015.

LITTIG, J.; NOVAIS, I. P. **Modelagem Matemática e as Tecnologias Educacionais: construindo o conceito de funções por meio do trabalho**. In: Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática, 2016, Londrina. Anais do VII Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática. Londrina: Publicado por Universidade Estadual de Londrina, 2016. v. 1. p. 744-753.

MALHEIROS, A. P. S.; FRANCHI, R. H. O. L. As Tecnologias da Informação e Comunicação nas produções sobre Modelagem no GPIMEM. In: Marcelo de Carvalho Borba; aparecida Chiari. (Org.). *Tecnologias Digitais e Educação Matemática*. 1ed.São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013, v. 1, p. 175-194.

NISS, M. Modeling a crucial aspect of students' mathematical modeling. In R. Lesh, P. Galbraith, C. R. Haines, & A. Herford (Eds.). *Modelling students' mathematical competencies* (p. 43-59). New York: Springer, 2010.

PALHA, S. A. G. Shift-Problem Lessons: Fostering Mathematical Reasoning in Regular Classrooms. **Research Institute of Child Development and Education**, University of Amsterdam, The Netherlands, 2013.

PIFFER, T. B.; BORSSOI, A. H. **Modelagem Matemática em uma Sala de Aula de Física: relato de experiência**. In: Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática, 2016, Londrina. Anais do VII Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática. Londrina: Publicado por Universidade Estadual de Londrina, Universidade Tecnológica Federal do Paraná., 2016. v. 1. p. 769-780.

SANTOS, L. M. M; BISOGNIN, V. Experiências de ensino por meio da modelagem matemática na educação fundamental. In: BARBOSA, J. C; CALDEIRA, A. D; ARAÚJO, J. L (org). **Modelagem matemática na educação matemática brasileira: pesquisas e práticas educacionais**. v. 3. Recife: SBEM, 2007.

SILVA, R. T.; BORSSOI, A. H. Um estudo sobre as possibilidades do Ensino Híbrido para o Cálculo Diferencial e Integral.. In: Encontro Paranaense de Educação Matemática - XIV EPREM, 2017, Cascavel. Anais do XIV Encontro Paranaense de Educação Matemática, 2017. p. 1-13.

SILVA, A. P. **A modalidade EaD semipresencial e a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral**. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” - Faculdade de Ciências, Bauru/SP, 2017.

STILLMAN; BROWN; GEIGER, G. A.; J.P.; V. Facilitating Mathematisation in Modelling by Beginning Modellers in Secondary School. In: **MATHEMATICAL MODELLING IN EDUCATION RESEARCH AND PRACTICE (ICTMA 15)**, edited by Gloria Ann Stillman, Werner Blum, Maria Salette Biembengut. Springer, 2015.

TREVISAN, A. L.; MENDES, M. T. A Prova Escrita como Instrumento de Avaliação em Aulas de Matemática. **EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA (SÃO PAULO)**, v. 45, p. 48-55, 2015.

ÇENGEL, Y. A.; CIMBALA, J. M. **Mecânica dos Fluidos: fundamentos e aplicações**. Tradução: Fábio Saltara, Jorge Luis Baliño, Karl Peter Burr. – 3. ed. – Porto Alegre: AMGH, 2015.