Desprezar o infinitésimo ou pegar a parte real?: um estudo sobre a derivada no contexto infinitesimal

Raquel Milani[1]

[1] Mestranda do curso de Pós-graduação em Educação Matemática da UNESP/Rio Claro – SP. E-mail: raqmilani@yahoo.com.br

O presente artigo trata da discussão a respeito de um resultado da pesquisa que estou realizando a nível de mestrado. A derivada de uma função é apresentada na abordagem infinitesimal, e analisa-se as justificações dadas por um grupo de alunos sobre os resultados encontrados para a derivada.

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, tradicionalmente, é baseada no conceito de limite. Nos cursos de graduação em Física, a situação não é diferente. Pesquisas sobre a aprendizagem desse conceito (CORNU, 1983, e.g) mostram a existência de diversos obstáculos epistemológicos (BACHELARD, 1983) que surgem nesse processo. Um desses obstáculos são as concepções infinitesimais dos alunos. A pesquisa que estou realizando tem como objetivo saber como alunos do curso de Física lidam com essas concepções quando conceitos de Cálculo são estudados via abordagem infinitesimal, sabendo que esses alunos estavam regularmente matriculados numa disciplina de Cálculo tradicional.

Para alcançar tal objetivo, a escolha metodológica foi por uma abordagem qualitativa de pesquisa. Segundo Alves-Mazzotti e Gewandsznajder (2001), esse tipo de pesquisa segue uma tradição compreensiva ou interpretativa. Ela procura retratar a perspectiva dos sujeitos da pesquisa, ou seja, como reagem às situações que estão sendo focalizadas (LÜDKE; ANDRÉ, 1986). O procedimento metodológico escolhido foi o que Steffe e Thompson (2000) entendem por experimento de ensino, ou seja, uma seqüência de episódios de ensino que objetiva a “[...] exploração e explicação da atividade matemática dos estudantes”[2] (Ibid., p. 273). Um grupo de quatro alunos matriculados na disciplina de Cálculo, do curso de graduação em Física da UNESP/Rio Claro, participaram da pesquisa. O experimento de ensino consistiu em quatro encontros, onde foram trabalhados assuntos como derivada de funções polinomiais e da função seno, integral definida e o segundo teorema fundamental do Cálculo, segundo a abordagem infinitesimal e apoiados pela ferramenta zoom do software Corel Draw. Esses encontros ocorreram paralelamente ao horário da aula regular, porém em uma sala diferente, com computadores, onde o software estava instalado em uma das máquinas. Após a realização desse experimento, ocorreram mais dois encontros com os alunos. No primeiro, os quatro estudantes prepararam uma apresentação a respeito do que haviam trabalhado durante o experimento de ensino. O segundo encontro foi a apresentação para os colegas e a professora responsável pela disciplina, no horário de uma aula regular de Cálculo. Essa seqüência de encontros foi pensada tendo como base o método de trabalho utilizado por Sierpinska (1987): a) o professor trabalha com algum conceito com os alunos; b) os alunos preparam uma exposição; c) os estudantes apresentam o que prepararam para a classe inteira e para o professor responsável.

Em vários dos encontros de Cálculo Infinitesimal, o cálculo da derivada de funções foi realizado. Segundo a abordagem infinitesimal, a derivada de uma função é, por

[2] “ ... exploratio

definição, a parte real do quociente $\frac{dy}{dx}$, onde dy e dx são infinitésimos. Como exemplo, trago a resolução da derivada da função $S(t) = -4{,}9t^2 + 50$.

Atualmente, esse cálculo via infinitésimos é rigorosamente aceito pela Matemática. A teoria que fundamenta tal estudo é a Análise Não-Standard, cujo criador é Abraham Robinson, na década de 60. Nos encontros com os alunos, essa legitimação foi revelada e, assim, desenvolvemos alguns tópicos de Cálculo Infinitesimal. Quando trabalhamos com o cálculo de derivadas, sempre solicitava aos alunos que justificassem suas repostas, ou seja, questionava por que a resposta que encontravam era a derivada da função. É sobre essas justificativas e concepções que os alunos apresentaram ao longo dos encontros que se trata o presente artigo.

Para auxiliar na análise das relações entre as concepções infinitesimais dos alunos, trago a noção de *concepções espontâneas* de Cornu (1983) e de *imagem* e *definição conceitual* de Tall e Vinner (1981). Segundo Cornu, as *concepções espontâneas* são as idéias, imagens, processos e palavras a respeito de um conceito que não são fruto do ensino organizado sobre esse conceito. São idéias a priori. Refiro-me aqui a *ensino organizado*, entendendo que seja o ensino institucionalizado, realizado na escola, na universidade sobre o assunto. Tais concepções fazem parte da *imagem conceitual*, que é, segundo Tall e Vinner, a estrutura cognitiva total associada ao conceito, que inclui todas as figuras mentais, bem como propriedades e processos associados. Quando o estudante usa uma série de palavras para especificar o conceito ou para explicar sua imagem conceitual evocada, Tall e Vinner usam o termo *definição conceitual* para designar essa série de palavras. Se essa definição for a aceita pela comunidade matemática, ela é uma *definição formal*. Só tem sentido falar em uma definição ser aceita ou não, se considerarmos o contexto em que ela está sendo aceita. Nos encontros de Cálculo Infinitesimal, a definição de infinitésimo e de derivada apresentadas por mim foram, respectivamente, número menor que qualquer real positivo e a parte real do quociente infinitesimal $\frac{dy}{dx}$. Nos encontros, essas foram as definições formais. Não tinha sentido, pensando em um curso de Cálculo, apresentar as definições segundo ultrafiltros e classes de equivalência, pois o objetivo dos encontros não era o de formalizar os conceitos. Esse objetivo é de um curso de Análise.

Tentando justificar a resposta que obtiveram para a derivada das funções, os alunos apresentaram algumas concepções nos primeiros encontros. Algumas dessas idéias são as seguintes: "*isso é por causa que* dx *é um número tão pequeno que dá para aproximar para zero*", "p*orque ela* [a parte infinitesimal] *é tão pequena que posso desprezá-la*", "*no conjunto dos reais* [o infinitésimo] *não é nada*", "p*orque quero só a parte real*". Segundo a definição de derivada, ela é a parte real. Os alunos também viram, através do ensino organizado realizado nos encontros, que um infinitésimo (dx ou $-4{,}9dt$) no conjunto dos números reais não vale nada ou não existe. Portanto, as duas últimas justificativas estão ligadas à definição formal de derivada.

As duas primeiras respostas remetem a idéias evocadas pelos alunos quando, no primeiro encontro, foram perguntados sobre suas concepções a respeito de infinitésimo. Mais especificamente, perguntei: v*ocês já ouviram falar em infinitésimo? Vocês lembram de alguma palavra, frase ou figura que esteja relacionada com infinitésimo?* As respostas dos alunos indicaram que não haviam passado por nenhum ensino organizado a respeito do conceito *infinitésimo*, caracterizando-se, então, como *concepções espontâneas infinitesimais*. Duas delas são as seguintes: "*pontos infinitamente pequenos*", "*pontos muito pequenos, que podem ser desprezíveis em alguns cálculos*". As imagens de infinitésimo como sendo algo muito pequeno e que pode ser desprezado foram evocadas por alguns alunos para justificar o resultado da derivada. Essas justificações mostram o aparecimento das concepções espontâneas, mesmo depois de um ensino organizado sobre derivada e infinitésimo. Segundo a teoria apresentada por Tall e Vinner (1981), as definições, formais ou não, fazem parte da imagem conceitual. Porém, para facilitar o entendimento sobre as relações entre as concepções apresentadas pelos alunos, faço a distinção entre a origem dessas concepções. Quando a resposta não for formal, digo que essa veio da imagem conceitual. Afirmo que a resposta veio da definição formal, quando for relacionada à teoria matemática apresentada nos encontros. Assim, nas duas primeiras justificações, os alunos argumentaram segundo a imagem conceitual de infinitésimo e, nas últimas o argumento utilizado teve origem nas definições formais apresentadas nos encontros.

No último encontro, os alunos apresentaram o cálculo da derivada da função $S(t) = -4{,}9t^2 + 50$. Eles utilizaram as mesmas justificações anteriormente citadas, e ainda outras: 1) "*porque eles são infinitamente pequenos não vão influenciar tanto o resultado*", 2) "*É definido assim. Você pega a parte real. Você não desconsidera* [o infinitésimo], *porque os números reais também estão nos hiper-reais. Você só está pegando a parte real*". Nessa última, o aluno deixa claro que a justificativa é simplesmente porque a definição diz isso. Reforça que não é uma questão de desconsiderar ou desprezar. O infinitésimo não é desconsiderado no cálculo. Ele existe e "*é muito importante, tanto que tem até um conjunto especial para ele, que são os hiper-reais*", legitimando seu uso. O "desprezar" foi utilizado pelos alunos com dois sentidos. Um deles está ligado às concepções espontâneas: infinitésimo é muito pequeno, pode ser desprezível. O outro foi usado no sentido de não considerar a existência dos infinitésimos, e foi evocado ligado a uma concepção relacionada às definições formais. O aluno que apresentou a justificativa 2), foi o único que em todos os encontros recorreu à definição formal para sustentar suas respostas. Com exceção desse aluno, no encontro de apresentação, as justificativas baseadas na imagem conceitual foram preponderantes.

Os alunos tinham a preocupação de fazer com que seus colegas entendessem o que estavam falando. Essa preocupação podia ser notada no encontro de preparação. Parece que não bastava apenas apresentar a definição formal como justificativa para a derivada ser calculada daquela forma. Eles sentiram a necessidade de explicar por que a derivada era assim definida: "*tem que explicar por que a gente pega a parte real*". Tendo em vista essa necessidade, fica justificado o grande uso da imagem conceitual. Ela serve para dar apoio ao aluno. Na imagem, encontram-se todas as concepções que o aluno incorporou. Sobre o que está na imagem conceitual, o aluno sabe falar, pois é o que ele construiu.

Mas, então, para calcular a derivada, tanto faz pegar a parte real quanto desprezar os infinitésimos? Na maioria das vezes, pensando no primeiro caminho ou no segundo, chegamos ao mesmo resultado. Existem situações, porém, que o quociente infinitesimal é zero. Se pegarmos a parte real, a derivada é zero. Se pensarmos, no entanto, em desprezar o infinitésimo, não podemos tomar zero como a derivada, pois zero é um infinitésimo[3]. Quando a resposta vem da imagem conceitual pode ocorrer tal situação. Pedagogicamente falando, portanto, tem diferença entre pegar e desprezar. É importante que o professor saiba de onde vem a resposta do aluno. Ver se ele está fazendo operar sua imagem conceitual ou a definição formal. Em muitos casos, usar uma imagem contraditória com a definição formal pode levar a conflitos, como na situação acima, podendo indicar a existência de um obstáculo epistemológico, muitas vezes causados pelas concepções espontâneas dos alunos. Esses conflitos são importantes para o processo de aprendizagem. Eles podem levar a uma reestruturação da imagem conceitual do aluno, significando a superação de um obstáculo.

O cálculo de derivadas via infinitésimos é legitimado pela Matemática. O mesmo não ocorre por muitos professores. Por que os infinitésimos não são tratados como conhecimento legítimo em sala de aula? O que percebo é que ao falar em infinitésimo, geralmente, remete-se à Análise Não-Standard. Portanto, pensa-se: *como trabalhar com ultrafiltro e axioma da escolha? Isso é um absurdo! Não funciona!* A questão que não é considerada é que em um curso de Cálculo, ou melhor, em um curso de Cálculo para alunos de Física, o objetivo não é formalizar os conceitos. Esse é um objetivo das disciplinas de Análise, seja ela Standard ou Não-Standard. O objetivo de uma disciplina de Cálculo, ao meu ver, é trabalhar com as concepções dos alunos e tratar intuitivamente os conceitos, aplicá-los às diversas áreas em que podem ser úteis para a resolução de problemas. É isso que muitos professores não compreendem ou não querem compreender. A conseqüência dessa concepção é que a teoria do limite acaba se constituindo em um obstáculo epistemológico ao Cálculo Infinitesimal. Obstáculo não para os alunos, mas sim para esses professores.

Referências Bibliográficas:

ALVES-MAZZOTTI, A. J., GEWANDSZNAJDER, F. *O método nas ciências naturais e sociais*: pesquisa quantitativa e qualitativa. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2001. 203p.

BACHELARD, G. *Epistemologia. (Trechos Escolhidos)*. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1983.

CORNU, B. *Aprentissage de la notion de limite:* conceptions et obstacles. Tese (Doctorate de Toisieme Cycle de Mathèmatiques Pure) – Universite Scientifique et Medicale de Grenoble, Grenole, 1983. Tradução feita por Luisa Ribeiro Baldino e Tânia Cristina Baptista Cabral.

LÜDKE, M. & ANDRÉ, M. E. D. A. *Pesquisa em educação*: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986. 99p.

SIERPINSKA, A. Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics,* 18, p.371-97, 1987.

STEFFE, L. P., THOMPSON, P. W. Teaching experiment methodology: Underlying principles and essencial elements. In: LESH, R., KELLY, A. E. (Eds.). *Handbook of research data design in mathematics and science education*. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 2000. p.267-307.

TALL, D. O., VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, n.12, p.151-69, 1981.

[3] Zero é um número menor que qualquer real positivo, portanto é infinitésimo.