

## Um contexto Histórico para Análise Matemática

Marcelo Salles Batarce  
Universidade Estadual do Mato Grosso do Sul  
mbatarce@bol.com.br

### Objetivo

Talvez a tarefa mais importante de um trabalho científico é a de tornar explícito seus pressupostos. Na área de Educação Matemática esta questão se constituiu de modo mais essencial ainda, já que a área agrega uma enorme gama de concepções distintas de seus pesquisadores.

A medida que um ponto é foco de divergências de posicionamentos, acaba naturalmente se destacando de forma fundamental. Assim temos compreendido a questão do grau e modo pelo qual se correspondem Educação Matemática e a melhora do Ensino de Matemática.

Há um grupo que se opõe ao fato de que esta é uma das funções ou fundamento da Educação Matemática. De outro lado há que tem se detido na tarefa de propor melhoras para o Ensino de Matemática em suas pesquisas e práticas dentro desta área (Educação Matemática).

Lins (1999), por exemplo, referindo-se as práticas educacionais associadas ao pressuposto de que “somos todos iguais”, faz a seguinte observação:

“reforçam a noção de Educação Matemática como fundamentalmente desenvolvedora de metodologias. A Psicologia, como área de suporte, proveria o como somos, a Matemática o que a Matemática é, e a Educação Matemática daria o como Ensinar. Com S1 (pressuposto de que somos todos iguais) e E1 (práticas educacionais associadas a este pressuposto) vamos até uma Educação Matemática interdisciplinar, mas não além disto”. (LINS, 1999, ênfase nossa)

Nosso trabalho, que apresentamos nesta oportunidade resumidamente, coloca-se na linha de pesquisa em História da Matemática e suas Relações com a Educação Matemática, assim referimo-nos a História da Matemática como Educação Matemática e temos assumido também uma História da Matemática que não é em essência uma ferramenta para melhora do Ensino de Matemática, ao invés disto a consideramos como um espaço que permite questionar a matemática enquanto absoluta e dada a priori.

Deste modo nos posicionamos frente a questão inicial e ao mesmo tempo identificamos História da Matemática como Educação Matemática. Antes de nos aprofundarmos neste tipo de consideração cabe lembrar que nosso posicionamento não implica em uma desconsideração à Matemática e seu Ensino Tradicional (termo no trabalho de Silva 1999).

Assim fica definido nosso objetivo. Como pode ser considerada a Educação Matemática se não como uma melhora do Ensino de Matemática? Neste contexto como caracterizar a História da Matemática enquanto Educação Matemática, se não como uma ferramenta, em última análise, metodológica?

### Metodologia

Nossa metodologia em síntese é a pesquisa bibliográfica. Mas, temos levado em conta as intenções que nos conduziram a delimitar o problema, através de uma espécie de uma auto

análise ou auto observação. Temos indicado os elementos que influenciam a direção que a pesquisa tem assumido.

A proposta inicial apontava para uma pesquisa Histórica de conceitos Matemáticos da Moderna Teoria da Medida e do trabalho de Henri Lebesgue, sempre porém, com uma preocupação com a Educação Matemática.

Nossa disposição se mostrou favorável à busca de um material histórico de acordo com nosso pressupostos referentes a História da Matemática enquanto Educação Matemática. Nesta direção acabamos por destacar a importância de uma caracterização da Análise Matemática enquanto período histórico.

A justificativa desta importância destacada, retoma a questão inicial, ou seja, a consideração da História da Matemática como transcendente a questão da melhora do Ensino de Matemática. Nos permitimos mostrar a existência de um material nem contra nem a favor da melhora do atual Ensino de Matemática, mas um material cuja essência é o questionamento da manutenção de elementos extremamente típicos do Ensino Tradicional de Matemática.

Nos referindo aos cursos de Análise, questionamos a quase unânime desconsideração de possíveis construções dos números reais, apontando para as possíveis causas e destacando a riqueza, até mesmo para o Ensino de Matemática de explorações que consideramos fundadas inevitavelmente em caracterizações históricas.

Neste momento deve se ressaltar que o apontamento de um material histórico para o Ensino de Matemática tem caráter de questionamento, ele não se justifica em sua utilidade em si enquanto ferramenta metodológica, também não exclui essa possibilidade mas, em essência levanta os motivos de sua desconsideração.

O material que temos levantado, não é tomado como o ideal no sentido de melhor, mas, como um entre outros que poderiam ter tal status igual aos mesmos comumente utilizados.

## Resultados Iniciais

As modernas abordagens formais dos cursos de Análise, ao menos no Brasil, têm dado pouca importância para a construção dos Números Reais. Se olharmos um livro moderno de Análise Matemática, será visto que não há um capítulo que trata especificamente da construção dos Números Reais. Na maioria das vezes é postulado o conhecido axioma do supremo ou a existência de um corpo ordenado completo. Observemos a citação abaixo:

“Frisamos, porém, que nosso ponto de vista coincide com o exposto na p. 511 de Spivak: “É inteiramente irrelevante que um número real seja, por acaso, uma coleção de números racionais; tal fato nunca deveria entrar na demonstração de qualquer teorema importante de números reais. Demonstrações aceitáveis deveriam usar apenas o fato de que os números reais formam um corpo ordenado completo”. (ELON LAGES LIMA P. 47, 48. Grifo nosso).

Pelo texto acima é possível verificar como este tipo de abordagem esta filiada ao formalismo. De fato, a princípio o significado de número Real é (des)considerado de modo a tornar-se algo do acaso. As demonstrações e teoremas relacionados a isto, ao que quer que possa ser um número real, ocupam uma posição de importância destacada.

Nesta citação o cerne do conceito de número real é um típico objeto da Matemática Formal, ou seja, uma Estrutura Algébrica, além deste, qualquer outro significado que se possa

dar, inclusive o histórico, deve ser desprezado, esquecido. Um pouco abaixo, na mesma página, o autor alerta para esta estratégia:

“Ora, já concordamos, desde o capítulo anterior, em adotar o método axiomático, segundo o qual a natureza intrínseca dos objetos matemáticos é uma matéria irrelevante, sendo o importante as relações entre esses objetos.” (IDEM)

Compreender a caracterização Histórica da Análise Matemática que temos proposto em nosso trabalho, fornece um contexto de significados para os estudos da mesma diferentes dos significados estritamente formais. Este outro contexto de significados é no mínimo tão legítimo como o anterior. Nós iremos nos deter neste pequeno espaço a seguinte consequência de se destacar a construção dos Números Reais no estudo da Matemática: a integração dos termos Número Real e Medida.

Como a reta real, tal como concebemos hoje, se estabelece historicamente?

Consideramos previamente, as duas seguintes concepções aparentemente contrárias: Através da noção de continuidade, possivelmente implícita na noção de reta estabelece-se o conceito moderno de número Real ou, que o conceito moderno de número Real introduz historicamente na matemática a noção de continuidade da reta. Vejamos uma posição a respeito desta contrariedade:

“Mas então, onde fica aquela “reta real” que desenhamos no quadro negro? Não fica em lugar algum se aceitarmos a concepção de matemática como entendida na Cultura Ocidental, porque aquela reta que desenhamos no quadro negro só pode ser compreendida como uma peça do espaço visível na qual nos movemos de um lado para outro e isso é irreduzível a uma axiomática à la Ocidente, isto é, baseada na noção de conjunto abstrato. É um conceito essencialmente orgânico e só pode ser entendido como tal pela nossa intuição de espaço.

Mas então se  $L$  é essa reta visível, desenhada no quadro negro é claro que não é possível definir nenhum isomorfismo entre  $R$  e  $L$  [reta real], porque  $R$  é uma “entidade matemática” e  $L$  não o é, pois não passa de um risco branco no quadro negro!” (LINTZ, 1985 P. 4)

Voltemo-nos à História. A Geometria Analítica ou o método das coordenadas, estabelece decisivamente um par de eixos nos quais se dispõem os números através da determinação das medidas de comprimentos de segmentos. A Reta Real começa a nascer.

O método de comparação de dois segmentos, essência da noção de medida e representado pela Teoria das Proporções de Eudoxo, será utilizado como potencial para a disposição dos Números na Reta. Mas esta disposição só será requisitada quando tratar-se do estudo das quantidades de variações contínuas: O Cálculo.

Assim como sabemos o Método de Decartes é fundamental para o estabelecimento do Cálculo. Para concretização do Cálculo é necessário juntar a este método a noção de função.

O que nos importa é que com o estabelecimento dos eixos e a noção de variação contínua, a Teoria das Proporções de Eudoxo, base da medida como comparação de dois segmentos, tornasse base da medida como comparação de todos os segmentos. Isto é sugerido pela determinação de uma única medida e pela transitividade.

Mas até este momento a moderna definição de número Real e portanto a Reta Real ainda não estavam estabelecidas. Apenas quando se estabelecem estas noções, as frações são legitimadas como números e não é de se estranhar que, como consequência disto, se proponha uma notação de frações mais comparativa, ou seja, a notação decimal.

Neste mesmo instante, observa-se que eles não preenchem a reta e então através de trabalhos como o de Dedekind define-se número Real. Em realidade esses dois processos: a

concretização dos números racionais na reta e o estabelecimento da noção de número real, ocorrem conjuntamente. Ou seja, as frações são tomadas na reta apenas quando se tornam número real.

Das linhas anteriores poderia se argüir: “Em Decartes já temos a origem do conceito de número real, na medida em que temos os eixos. Com o Cálculo, idem, a medida que temos a noção de continuidade. Na Teoria das Proporções de Eudoxo, estava a possibilidade de medir e o raciocínio se repete.”

Neste tipo de raciocínio as noções de continuidade e proporção são tidas como primárias e o conceito de Número Real é superior, abstrato. Mas o que é continuidade? Se refletirmos a fundo veremos que o problema desta linha de pensamento foi bem expresso por Lintz.

Porém ao contrário de Lintz nós preferíamos dizer que tanto as noções básicas, referenciadas pelos termos continuidade e reta e a noção “abstrata” de número Real, não são incomparáveis por terem naturezas distintas, mas por serem uma coisa só.

Este é o objetivo que destacamos, ou seja, uma apresentação que proporcione a integração destes conceitos. Tal apresentação, necessitaria, ainda segundo nosso entendimento, da construção dos números Reais. Em uma palavra eu diria que a definição mais significativa de número real é: Número Real é Medida.

#### Referências Bibliografia

LINS, R. Epistemologia e Educação Matemática. In: Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas. Organizadora: Maria Aparecida Viggiani Bicudo. São Paulo: Editora Unesp, 1999

SILVA, M. R. G. “Concepções Didático-Pedagógicas do Professor-Pesquisador em Matemática e seu funcionamento na sala de aula de Matemática”. Boletim de Educação Matemática 12 1997 13-27.

LIMA, E. L. .”Análise Real” Volume 1