Modelagem matemática na sala de aula: um estudo

Lourdes Maria Werle de Almeida
Departamento de Matemática
Universidade Estadual de Londrina- UEL
lourdes@uel.br

1- Introdução

A natureza das atividades realizadas pelos alunos na sala de aula constitui um dos fatores que podem influenciar de forma decisiva a construção do conhecimento matemático e o desenvolvimento da aprendizagem de conteúdos específicos da Matemática. Visando propor atividades ou analisar a sua influência sobre o processo de aprendizagem, as pesquisas em Educação Matemática vêm assumindo diferentes direções.

Uma vertente importante diz respeito à introdução de atividades de Modelagem Matemática na sala de aula. Neste ambiente, o próprio aluno se envolve com a construção, exploração e validação de modelos matemáticos.

A relevância da Matemática em diversas atividades sociais e profissões, hoje fortemente estabelecida, e a sua contribuição para uma cidadania informada e consciente, fazem com que a Modelagem Matemática seja percebida como uma perspectiva importante em busca de melhorias no processo de ensino e aprendizagem da matemática. O interesse por este tipo de atividade decorre, portanto, do papel da matemática na sociedade, suscitado fortemente pelo uso dos computadores e da sua contribuição, muitas vezes decisiva, para a interpretação e intervenção em múltiplas situações do cotidiano.

Neste contexto, levando em consideração que, segundo D'Ambrósio (2002), o ciclo de aquisição do conhecimento é deflagrado á partir de fatos da realidade, a Modelagem Matemática pode influenciar a construção do conhecimento matemático uma vez que pode emergir de fenômenos que têm origem na realidade. Assim, a exploração, no ensino, de situações da vida real em que a matemática se aplica, torna a matemática mais dinâmica e interessante e pode proporcionar uma aprendizagem significativa.

Neste trabalho apresentamos uma atividade de modelagem matemática desenvolvida com alunos de um curso de licenciatura em Matemática. O objetivo do estudo consiste em, mostrar que, por meio do desenvolvimento de um modelo matemático para descrever um problema não matemático, os alunos tiveram oportunidade de apropriar-se de conhecimentos diversos relativos ao problema e à matemática envolvida na obtenção do modelo.

O trabalho foi desenvolvido no âmbito da disciplina de Introdução à Modelagem Matemática no curso de Licenciatura em Matemática. A partir da escolha do tema, "A Água" os alunos, assessorados pela professora, definiram o problema a estudar e coletaram um conjunto de informações e dados necessários para o estudo.

2- O problema em estudo

A água é um bem precioso. Ela ocupa 70% da superfície da Terra. A maior parte, 97%, é salgada. Apenas 3% do total é água doce e, desses, 0,01% vai para os rios, ficando disponível para uso. O restante está em geleiras, icebergs e em subsolos muito profundos. Ou seja, o que pode ser potencialmente consumido é uma pequena fração.

O crescente agravamento da falta de água tem levado as pessoas a estabelecer uma nova forma de pensar e agir, inclusive mudando seus hábitos, usos e costumes com relação à utilização da água. A conscientização e a educação do consumidor são fundamentais. Racionalizar o uso da água não significa ficar sem ela periodicamente. Mas, usá-la sem desperdício continuamente, considerá-la uma prioridade social e ambiental.

Neste trabalho estamos interessados em analisar o consumo de água na cidade de Londrina bem como estabelecer estimativas deste consumo para os anos seguintes. Fazendo uma previsão do consumo podemos definir alguns cuidados adequados em relação ao consumo de água na cidade.

A Companhia de Saneamento do Paraná – SANEPAR- é a empresa responsável pela captação, tratamento e distribuição dá água em todo o estado do Paraná. O abastecimento da cidade é efetuado utilizando-se principalmente os mananciais de superfície Rio Tibagi e Ribeirão Cafezal. Apenas 9% da capacidade total é proveniente de poços tubulares.

Para desenvolver este trabalho, os alunos obtiveram um conjunto de dados junto a SANEPAR relativos ao consumo médio mensal durante os anos de 1993 até 2000 apresentados na Tabela 1 abaixo.

2.1- A resolução do problema

Uma análise preliminar dos dados da Tabela 1 permite verificar que o consumo de água relativo aos anos de 1993 até 2000 é crescente. Por outro lado, podemos supor que este consumo mensal é limitado, ou seja, não será infinitamente grande mas irá se estabilizar ao longo do tempo. Isto denota um comportamento assintótico dos dados no decorrer do tempo. Na dedução de um modelo para descrever o consumo é necessário determinar o valor denominado "valor de estabilidade", C^*, do consumo e este é obtido por meio do método de Ford-Walford. Usando este método e considerando que o consumo durante estes anos determina uma seqüência (C_n) monótona crescente e limitada, logo convergente, a existência de um ponto de estabilidade pode ser descrita pela condição $C_{n+1} \cong C_n$

Considerando as seqüências (C_n) e (C_{n+1}) definidas como na Tabela 2, vamos determinar uma função capaz de ajustar estes pares (C_n, C_{n+1}), isto é vamos escrever $C_{n+1} = f(C_n)$.

Usando um ajuste linear, obtivemos: $C_{n+1} = 291907{,}33 + 0{,}93804\, C_n$

Fazendo $C_{n+1} = C_n = C^*$, temos $C^* = 4.711.222{,}24$

O próximo passo consiste em observar que $\lim\limits_{n\to\infty} (C^* - C_n) = 0$ uma vez que $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = C^*$.

Usando um ajuste exponencial para os pares $(t_n, C^*\text{-}C_n)$ temos:

$$C^* - C_n = 1.948.595 \; exp(-0{,}06925\, t_n)$$

Assim, o modelo que descreve o consumo de água na cidade é dado por:

$$C_n = 4.711.222{,}24 \; - \; 1.948.595 \; exp(-0{,}06925\, t_n)$$

Considerando o tempo como a variável contínua t podemos escrever:

$$C(t) = 4.711.222{,}24 \; - \; 1.948.595 \; exp(-0{,}06925\, t)$$

A representação gráfica do modelo encontrado pode ser visualizada na Figura 1.

A validação do modelo, que consiste em comparar os dados observados com os dados estimados pelo modelo, mostra que o modelo é bastante adequado para descrever o fenômeno em estudo. A partir do modelo obtido, introduzimos o estudo de equações diferenciais e a calibração dos parâmetros de uma equação diferencial.

3- Considerações finais

Acreditamos que o trabalho descrito ilustra como a modelagem, vista enquanto estratégia pedagógica, possibilita a integração entre alguns conteúdos curriculares e problemas hoje bastante presentes na mídia, como é o caso do consumo de água, revelando cada vez mais o que Skovsmose (2001) chama de "poder formatador da matemática".

A escolha do tema, a coleta de informações e dados realizada pelo conjunto de alunos, fez com que cada um, indiretamente, se sentisse um pouco responsável pela resolução do problema.

A formulação das hipóteses pertinentes ao problema (como é o caso, por exemplo, da existência de um ponto de estabilidade para o consumo), embora tenha sido sugerida pelos alunos, em muitos momentos teve que ser assessorada e confirmada pela professora. A auto-confiança dos alunos sobre a veracidade destas hipóteses ainda não estava consolidada e necessitava de validação por parte da professora.

Uma dificuldade bem presente em diferentes momentos diz respeito aos conteúdos matemáticos adequados e se revela com a frase dos alunos "o que vamos usar aqui".

Uma vez concluída a dedução do modelo para descrever o problema em estudo, a expectativa dos alunos em validar o modelo foi muito grande. "Será que funciona?" é a frase então usada por eles. Neste sentido, a comparação entre os dados observados e aqueles estimados pelo modelo (Tabela 1) desempenha um papel fundamental para o desenvolvimento da "confiança" no resultado obtido e no fato de que a matemática escolar realmente é aplicada na resolução de problemas não matemáticos.

A possibilidade de realizar as previsões com o modelo obtido e observar que também estas correspondem às informações obtidas, desenvolve nos alunos o que Skovsmose (1990) traduz como "conhecimento reflexivo". Ou seja, o aluno se sente capaz de interpretar e agir sobre uma situação estabelecida pela matemática.

Embora o foco deste trabalho não seja a análise da questão do uso da tecnologia, é igualmente importante observar como o enfoque experimental com o computador serviu de base para que os alunos desenvolvessem os ajustes de curvas necessários para a dedução do modelo. Também, após a dedução do modelo, a representação do problema por meio de uma equação diferencial cujos parâmetros precisam ser determinados fez os alunos perceberem a importância do uso de recursos computacionais para resolver problemas através da Modelagem Matemática.

Um fato também bastante interessante diz respeito a um trabalho subsequente desenvolvido por um dos grupos envolvidos no presente estudo: quando da escolha de um tema completamente distinto estes alunos perceberam que um método semelhante poderia ser aplicado e, embora ainda necessitasse de algum auxilio, este grupo conduziu com êxito o novo trabalho. Isto denota que houve alguma construção de significados em relação ao problema e à matemática envolvida durante o processo de modelagem, contribuindo assim para uma aprendizagem mais significativa.

4-Referências bibliográficas

D'AMBROSIO, U. A matemática nas escolas, *Educação Matemática em Revista*, A 9, N 11, p 29-33, 2002.

SKOVSMOSE, O. Reflective knowledge: its relation to the mathematical modelling process.*Int.J.Math.Educ. Sci. Technol.,* London, V 21, N 5, pp 765-779, 1990.

SKOVSMOSE, O. *Educação Matemática Crítica,* Editora Papirus, Campinas, SP, 2001.

Tabela 1- Dados observados e dados estimados pelo modelo

t	ANO	CONSUMO OBSERVADO*	CONSUMO ESTIMADO
0	1993	2.811.681	2.762.627
1	1994	2.970.435	2.893.000
2	1995	2.975.000	3.014.651
3	1996	3.023.898	3.128.163
4	1997	3.156.415	3.234.080
5	1998	3.347.427	3.332.911
6	1999	3.504.519	3.427.057
7	2000	3.505.000	3.511.177
11	2004	3.742.674**	3.801.522
16	2009	4.071.625**	4.067.759
21	2014	4.606.675*	4.256.077

*** Dados obtidos junto à Sanepar**
**** Dados estimados pela Sanepar**

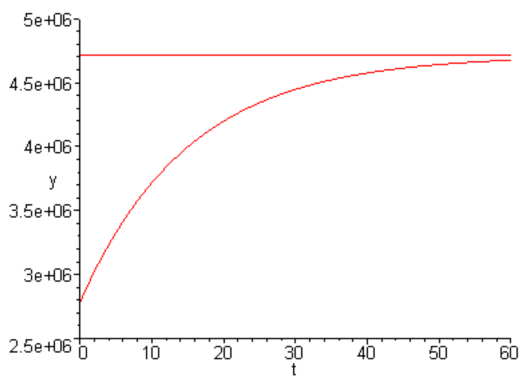

Figura 2: Modelo encontrado

Tabela 2- Seqüências (C_n) e (C_{n+1})

C_n	C_{n+1}
2.811.681	2.970.435
2.970.435	2.975.000
2.975.000	3.023.898
3.023.898	3.156.415
3.156.415	3.347.427
3.347.427	3.504.519
3.504.519	3.505.000
3.505.000	