Variedades Diferenciáveis

Emerson Lazzarotto
UNIOESTE – Foz do Iguaçu
lazzarotto@unioeste.br

Nesta pesquisa estamos interessados em fundamentar todos os conceitos necessários ao estudo das variedades diferenciáveis, desde o estudo das propriedades do cálculo diferencial de várias variáveis, passando pelo estudo de superfícies regulares de dimensão finita até a definição geral de variedade diferencial, estudando algumas das principais aplicações entre variedades diferenciáveis e os cálculos detalhados dos exemplos mais clássicos, bem como o estudo de algumas variedades, em particular, as variedades com estrutura algébrica de grupo e, finalmente, o estudo de conjuntos controláveis em variedades e espaços topológicos, os quais são de interesse nas engenharias e na física.

Metodologia:

A metodologia empregada, pelo professor coordenador desta pesquisa é a de estudo individual da bibliografia relacionada neste projeto, além de discussões e trocas de experiências com outros professores que trabalhem na mesma linha de pesquisa, inclusive de outras universidades.

Resultados de pesquisa (em andamento):

São apresentados a seguir alguns resultados clássicos do cálculo diferencial em Espaços Euclidianos, enfatizando o aspecto geométrico do Teorema da Função Inversa. Estes resultados serão amplamente utilizados no estudo das superfícies e das variedades diferenciáveis. O espaço euclidiano de dimensão n é o conjunto $\Re^n$ de todas as n - úplas x = $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de números reais. Os vetores $e_1 = (1, 0, ...,0)$, $e_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$, ..., e_n = (0, 0, ..., 0, 1) constituem a base natural de $\Re^n$.Se U é um subconjunto aberto do $\Re^m$, uma função vetorial f: U$\rightarrow\Re^m$ é perfeitamente determinada pelas suas funções coordenadas f^1, f^2, ..., f^n : U $\rightarrow \Re$ definidas pela relação

$f(x) = (f^1(x), f^2(x), ..., f^n(x))$, $x\in U$

Uma aplicação f: U$\rightarrow \Re^n$ é diferenciável no ponto x $\in$ U quando existe uma única transformação linear T: $\Re^m \rightarrow \Re^n$ tal que

$f(x + h) = f(x) + T(h) + r(h)$, com $\lim_{h\rightarrow 0} r(h)/h = 0$.

Tal transformação é chamada a derivada de f no ponto x e é indicada por $f'(x)$ ou $Df(x)$, e fornece uma boa aproximação de f no ponto x. Diz-se que f é continuamente diferenciável ou de classe C^1, e escrevemos $f\in C^1$, quando f é diferenciável em U e f' é contínua. Indutivamente, se $f^{(k)}(x)$ existe em cada ponto $x\in U$, define-se a aplicação $f^{(k)}$: U$\rightarrow$ L_k ($\Re^m$, $\Re^n$) e se $f^{(k)}(x)$ for contínua diz-se que f é de classe C^k Um difeomorfismo f: U $\rightarrow$V é uma bijeção diferenciável cuja inversa também é diferenciável. Se ambas f e f^{-1} são de classe C^k, dizemos que f é um difeomorfismo de classe C^k. A aplicação f: $\Re \rightarrow \Re$ definida por $f(t) = t^3$ é exemplo de um homeomorfismo diferenciável C^∞ que não é um difeomorfismo.

O Teorema da Função Inversa:

Sejam U $\subset \Re^m$ um aberto e f: U $\rightarrow \Re^m$ uma aplicação C^k tal que, num ponto $x_0 \in$ U, a derivada $f'(x_0) \in$ L ($\Re^m$) é um isomorfismo. Então f aplica difeomorficamente uma vizinhança menor V de x_0 sobre uma vizinhança W de $f(x_0)$. Tal difeomorfismo é C^k. Este teorema evidencia o fato de ser $f'(x_0)$ uma "boa aproximação" de f, pois, dado que $f'(x_0)$ é um isomorfismo, acarreta ser f biunívoca em uma vizinhança de x_0.

Superfícies nos Espaços Euclidianos

A noção de superfície de dimensão m num espaço euclidiano $\Re^n$ ($n \geq m$) é generalização direta dos objetos que encontramos na geometria diferencial clássica – as curvas regulares no $\Re^3$ e as superfícies do $\Re^3$ que possuem plano tangente em cada ponto.

Parametrização

Seja U_0 aberto do $\Re^m$. Uma aplicação $\varphi : U_0 \to \Re^n$ é uma parametrização de classe C^k e dimensão m do subconjunto $U = \varphi(U_0) \subset \Re^n$ se φ for um homeomorfismo de classe C^k e $\varphi'(x): \Re^m \to \Re^n$ for injetora. Define-se uma superfície m-dimensional do $\Re^n$ (de classe C^k) a um subconjunto não vazio $M = M^m \subset \Re^n$ tal que todo ponto p possui uma vizinhança aberta U munida de uma parametrização de classe C^k e dimensão m.

Bibliografia:

- LIMA, Elon L. Variedades Diferenciáveis. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1989.
- LIMA, Elon L. Curso de Análise, Volume 2. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1999.
- TENENBLAT, Keti. Introdução à Geometria Diferencial. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1990.
- McCARTY, George. An-Introduction with apllication to topological groups. New York: McGraw-Hill, 1967.
- LAZZAROTTO, Emerson. Ações de Semigrupos. Tese: Universidade Estadual de Maringá, 2001.