A divisão em Z: como processá-la – Pequenas controvérsias que duram toda a vida

Prof. M.Sc.Andréia Büttner Ciani
Prof. Dr.Samuel Edmundo López Bello
CCET-UNIOESTE – Cascavel-PR
abciani@hotmail.com
samuelbello@unioeste.br

Em sala de aula vê-se claramente a dificuldade de ensinar-se a operação da divisão para as crianças no conjunto dos naturais, e por diversas ocasiões para facilidade do cálculo lançamos mão de uma calculadora, onde o resultado é dado em reais. Porém, nos livros de Ensino Fundamental, no momento em que se ensina a divisão nos inteiros, que ocorre geralmente na 6ª série, o que se vê são sempre contas de divisão com o resto igual a zero, ou seja, divisões exatas. Pergunta-se: por que não se ensina as contas de dividir em Z com resto diferente de zero? Elas não existem? Neste conjunto a operação divisão é sempre exata?

Como você resolveria esta conta nos inteiros? Lembre-se que os números não comportam vírgulas.

$$\begin{array}{rl} -122 & \underline{|\;4\;\;\;\;} \end{array}$$

Todas as pessoas que foram solicitadas para a realização do cálculo acima, não tiveram dúvidas quanto ao seu quociente e resto. Será o mesmo palpite seu? O quociente e o resto encontrados foram positivos ou negativos? O algoritmo de Euclides, na sua extensão para os inteiros, é o que existe de teoria matemática para orientar a realização da divisão.

Vejamos como é apresentado num livro conhecido de Álgebra.

Algoritmo da Divisão

Se a e b são dois números inteiros quaisquer, com $b \neq 0$, existe um único par (q,r) de números inteiros, tal que $a=bq+r$ onde $0 \le r < |b|$. (Monteiro, 1978)

Suponhamos a seguinte questão:

"Um homem instantes antes de morrer declara a filhos que possui um saldo negativo de 200 reais. E seus 3 filhos deverão pagá-lo dividindo-o por 3 partes idênticas. Qual o valor pago por cada um? Lembre-se que neste mundo só existem os números inteiros, portanto, as moedas de centavos não existem. Como então processaremos a dívida citada?"

$$\begin{array}{rl} -200 & \underline{|\;3\;\;\;\;} \\ \underline{18} & -66 \\ -20 & \\ \underline{+18} & \\ -2 & \end{array}$$

Portanto, se a conta processa-se dessa forma neste mundo dos inteiros, nunca a citada dívida poderia ser paga, pois se não fosse o caso de se tratar de um múltiplo, sempre faltaria uma determinada soma para se chegar a cifra devida.

Os filhos foram ao banco cada um com R$ 66,00 devidos. O gerente não aceitou a quitação, pois: 66+66+66=198 reais.

O Banco não poderia ficar no prejuízo de 2 reais. Então foi feita pelo gerente a seguinte proposta da divisão:

$$\begin{array}{rl} -200 & \underline{|\;3\;\;\;\;} \\ \underline{+18} & -67 \\ -20 & \\ \underline{+21} & \\ +1 & \end{array}$$

Dessa forma, a dívida ao banco pode ser quitada, pois: 67+67+67=201.

E o gerente devolveu aos irmãos a quantia de R$ 1,00.

Como ensinar esta conta no Ensino Fundamental?

A Revista do Professor de Matemática da SBM, no.30, p.18, diz que no decorrer de 1995 a RPM recebeu vários artigos sobre divisão de números inteiros e sobre divisão de frações e que todos os autores ressaltavam a dificuldade que o professor encontra ao ensinar esses tópicos. Concordamos que o ensino da divisão é um assunto que ainda requer reflexão por parte dos educadores, visto o resultado da primeira investigação efetuada, confirmando a nossa hipótese.

No livro da 5ª série (Di Pierro Neto, 1982), encontramos o algoritmo que explica a divisão nos naturais pode não ser exata. Os exemplos seguintes são apresentados

$$\begin{array}{r|l} 7 & 2 \\ \hline 1 & 3 \end{array} \quad \text{ou} \quad 7=3\text{x}2+1 \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 11 & 4 \\ \hline 3 & 2 \end{array} \quad \text{ou} \quad 11=2\text{x}4+3$$

E conclui com o algoritmo DIVIDENDO = QUOCIENTE X DIVISOR + RESTO, onde o resto será sempre menor que o divisor.

No mesmo livro acima referido, a operação de divisão não exata nos inteiros não recebe qualquer tratamento em nenhuma das séries do Ensino Fundamental e Médio, sendo apenas definida através da equivalência que segue

$a \div b = c \Leftrightarrow c \, . \, b = a$ desconsiderando totalmente a existência de um resto.

Observamos ainda que A PROPOSTA CURRICULAR PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA, Ensino Fundamental do Estado de São Paulo e os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática também não abordam o assunto.

(BELLO & PAPANI, 2001) já haviam observado que a divisão dos números Naturais é trabalhada na escola de modo exato e deixando "resto", porém, o mesmo não ocorre com a divisão de inteiros a qual apresenta-se sempre sem "resto".

Então, apenas com a Matemática da escola, não seria possível resolver problemas como o que foi acima abordado.

As pessoas vêem-se na necessidade de estender o algoritmo dos naturais para os inteiros e, pelo bom senso, não colocam a condição de que o resto seja um número do conjunto dos naturais.

Entendemos que a confusão não fica apenas em nível do Ensino Fundamental e Médio, ou dentre os alunos universitários, pois quando questionado sobre como resolveria a conta $-17\div5$, um professor de matemática de uma Universidade respondeu que o quociente seria -3 e o resto -2. Outro profissional com curso superior, respondeu ao ser informado do resultado correto "Então eu nunca soube fazer essas contas, por que eu aprendi sempre que o resto era negativo!" Provavelmente os dois estavam apoiados no algoritmo, Dividendo = Quociente x Divisor + Resto, neste caso, $-17= 5.(-3)+(-2)$. Inclusive a confusão pode ser gerada até mesmo por um livro científico, como é o caso do livro que apresenta o seguinte teorema (GARCIA&LEQUAIN, 1988):

TEOREMA. (Algoritmo da divisão em Z, de Euclides).

Sejam a, b $\in$ Z, b$\neq$0. Então existem t, r $\in$ Z tais que

$$a = b.t + r \text{ com } |r| < |b|.$$

Sejam então, $a = -17$, $b = 3$, podemos tomar, de acordo com o teorema, $t = -5$ e $r= -2$, pois

$$-17 = 3.(-5)+(-2) \text{ com } |-2|<|3|$$

Mas também poderíamos tomar $t = -6$ e $r = +1$, pois

$$-17 = 3.(-6)+(+1) \text{ com } |+1|<|3|.$$

Ambas as possibilidades para t e r não contrariariam o enunciado apresentado pelo autor.

Parece-nos então, que a grande maioria das pessoas processam a operação de divisão não exata em Z utilizando-se do algoritmo que lhes foi apresentado no Ensino Fundamental para números naturais e não o da Teoria dos Números que é o matematicamente correto.

Entendemos que cabe uma investigação mais ampla a respeito do teorema, da forma que é apresentada nos livros científicos e na sua transposição didática. Como então ensinar aos alunos do

Ensino Fundamental a operação de divisão em Z sem causar grandes “confusões”? Seria então recomendável continuar ensinando a divisão somente com resto igual a zero? Deixando assim as pessoas sem saber processá-las a vida toda?

Essa questão gerou um projeto de pesquisa que tem por objetivos:

- Verificar de que forma os alunos do Ensino Fundamental e Médio efetuam a operação de divisão em Z;
- Analisar o assunto nos livros didáticos;
- Verificar se os professores de Matemática do Ensino Médio e Fundamental conhecem a extensão do Teorema de Euclides da Divisão em Z;
- Verificar de que maneira os professores dos cursos superiores de Matemática tratam a questão da divisão nos conjunto dos inteiros;
- Como as pessoas fora da vida escolar e acadêmica se utilizam da operação de divisão no conjunto dos inteiros;
- Elaborar uma proposta para o ensino do assunto no Ensino Fundamental.

A metodologia empregada corresponde à Observação Participante (BRANDÃO, 1981) ou pesquisa etnográfica, parte da realidade social na sua totalidade e complexidade e a presença do observador, numa situação social, é mantida na investigação científica, compartilhando com eles seu ambiente natural de vida. O observador é parte do contexto que está sendo observado. Leva-se em consideração que ele modifica e é modificado pelo contexto.

Bibliografia

BRANDÃO, Carlos R. (Org.); Pesquisa participante. São Paulo, Brasiliense, 1981.

GARCIA, A. & LEQUAIN, Y.; Álgebra: um curso de introdução. Rio de Janeiro, IMPA, CNPQ, 1988.

DI PIERRO NETO, S.; Matemática: conceitos e operações: 5ª e 6ª séries, 1º grau. São Paulo, Saraiva, 1982.

BELLO, S. E. L. & PAPANI, F. M. G.; Aritmética da Escola e Teoria dos Números, Anais da XV Semana da Matemática, Cascavel-PR, UNIOESTE, 2001.

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO; Parâmetros Curriculares Nacionais (5ª a 8ª séries e Ensino Médio). Brasília, MEC, 1998.

SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO; Proposta Curricular para o Ensino de Matemática – Ensino Fundamental, 5ª edição, São Paulo, 1997.

MONTEIRO, L. H. J.; Elementos de Álgebra, 2ª ed., Rio de Janeiro, LTC, 1978.

SANTOS, J. P. O.; Introdução à Teoria dos Números, Rio de janeiro, IMPA, CNPQ, 2000.

DOMINGUES, H. H. & IEZZI, G.; Álgebra Moderna, São Paulo, Atual, 1982.

MACEDO JUNIOR, G. O.; O Significado da Operação de Divisão, RPM, 30, p.18, São Paulo, Sociedade Brasileira de Matemática, 1996.